Devoir Maison 1 (à rendre le 2 mars)

Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Les affirmations, même simples, doivent être raisonnablement justifiés. Dans les arbres de preuve, on indiquera les noms des règles utilisées.

Exercice 1. *Question de Cours*

✎ Soit $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux interprétations de $\mathcal{L}$, et $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un isomorphisme d'interprétations. Pour toute formule F sur $\mathcal{L}$ et environnement e dans M, montrez que

$$\mathcal{M}, e \models F \iff \mathcal{N}, \varphi(e) \models F$$

Exercice 2. *Absurdités*

✎ On dit que deux ensembles $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ de règles sont équivalents si les séquents prouvables par $\mathcal{R}$ sont les mêmes que ceux prouvables par $\mathcal{R}'$. On considère cinq ensembles de règles constitués des règles de la déduction naturelle classique autres que $\perp_c$, auxquelles on ajoute

($\mathcal{R}_1$) La règle $\perp_c$ ($\mathcal{R}_1$ étant donc la déduction naturelle classique)

($\mathcal{R}_2$) La règle du tiers-exclu : $\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$ t.e. et la règle d'explosion $\dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e$

($\mathcal{R}_3$) La double négation : $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} \neg\neg$

($\mathcal{R}_4$) La règle de Peirce : $\dfrac{}{\Gamma \vdash ((A \to B) \to A) \to A}$ Peirce et la règle d'explosion $\dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp_e$

($\mathcal{R}_5$) La contraposition : $\dfrac{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}{\Gamma \vdash A \to B}$ ctr

Montrez que ces cinq ensembles de règles sont équivalents.

Exercice 3.

Le but de l'exercice est de montrer que, en logique du premier ordre, on peut se passer des symboles de fonctions, ou des prédicats autres que $=$ (mais bien sûr pas les deux en même temps).

1. Soient $\mathcal{L}$ un langage, f un symbole de fonction n-aire et R un symbole de relation d'arité $n+1$ tels que f et R ne sont pas dans $\mathcal{L}$. On note $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$ et $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \cup \{R\}$. Définissez un encodage E_f des formules du premier ordre sur $\mathcal{L}_1$ vers les formules sur $\mathcal{L}_2$, et un encodage E_i des interprétations de $\mathcal{L}_1$ vers les interprétations de $\mathcal{L}_2$, tels que pour toute formule F sur $\mathcal{L}_1$ et interprétation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}_1$,
   (i) $\mathcal{M}$ et $E_i(\mathcal{M})$ ont le même domaine, et coincident sur $\mathcal{L}$;
   (ii) pour tout environnement e, on a $\mathcal{M}, e \models F$ si et seulement si $E_i(\mathcal{M}), e \models E_f(F)$.
2. Réciproquement, soit $\mathcal{L}_1$ un langage contenant un prédicat R, on veut remplacer R par une fonction. Proposez un langage $\mathcal{L}_2$ dont les prédicats sont ceux de $\mathcal{L}_1 \setminus \{R\}$, et définissez des encodages des formules et interprétations de $\mathcal{L}_1$ vers $\mathcal{L}_2$. Ensuite, énoncez et prouvez un résultat de cohérence de ces encodages, comparable à celui de la question précédente. On pourra supposer que $\mathcal{L}_1 \setminus \{R\}$ contient le prédicat d'égalité.

Définition (Règles de déductions naturelles)**.** On redonne ici les règles de la déduction naturelle classique.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ \text{aff} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot_c$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge_e^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^g \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \vee_e$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x \quad A}\ \forall_i\ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x \quad A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ \forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \quad A}\ \exists_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x \quad A \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \exists_e\ (x \notin VL(\Gamma, C))$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ =_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := t] \qquad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ =_e$$