TD1

Exercice 1. *Marathon des connecteurs binaires*

✎ Donnez des formules correspondant aux tables de vérité suivantes.

$x = 0, y = 0$	$x = 0, y = 1$	$x = 1, y = 0$	$x = 1, y = 1$	Exemple de formule correspondante
0	0	0	0	
0	0	0	1	$(x \wedge y)$
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

Exercice 2. *Injection ? Surjection ?*

Notation. Soit f une application de A dans B. On notera

— $f : A \hookrightarrow B$ si f est une injection de A dans B.

— $f : A \twoheadrightarrow B$ si f est une surjection de A dans B.

— $f : A \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow B$ si f est une bijection entre A et B.

1. Montrer que si $f : A \hookrightarrow B$ et si $A \neq \varnothing$, alors il existe g telle que $g : B \twoheadrightarrow A$.
2. Que dire si $A = \varnothing$?
3. Et si $B = \varnothing$?

Exercice 3. *Variantes du théorème de compacité*

Définition. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules du calcul propositionnel. Une formule F est *conséquence* de $\mathcal{A}$ si et seulement si toute distribution de valeurs de verité qui satisfait $\mathcal{A}$ satisfait F. On note alors $\mathcal{A} \vDash F$.

✎ Montrer l'équivalence de ces trois versions du théorème de compacité du calcul propositionnel.

(i) Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de formules du calcul propositionnel, $\mathcal{A}$ est satisfaisable si et seulement si $\mathcal{A}$ est finiment satisfaisable.

(ii) Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de formules du calcul propositionnel, $\mathcal{A}$ est contradictoire si et seulement si $\mathcal{A}$ admet au moins un sous-ensemble fini contradictoire.

(iii) Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de formules du calcul propositionnel, et pour toute formule F, F est conséquence de $\mathcal{A}$ si et seulement si F est conséquence d'une partie finie de $\mathcal{A}$.

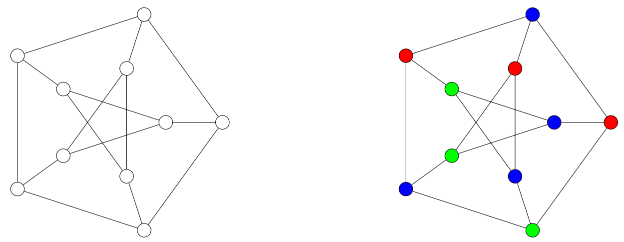
Exercice 4. *Coloration des graphes*

Définition (graphe)**.** Un graphe est un couple (V, E) où V est un ensemble et $E \in \mathcal{P}(V^2)$. On dira qu'un graphe est *simple* ssi pour tout $v \in V$, $(v, v) \notin E$.

Définition (k-coloration)**.** Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On appelle k-coloration de G toute application $c : V \to [\![1\,;\,k]\!]$ vérifiant

$$\forall (u, v) \in E \qquad c(u) \neq c(v)$$

Exemple.



1. Exprimer le problème de la k-coloration d'un graphe G avec des formules du calcul propositionnel.
2. Montrer que, pour qu'un graphe soit k-coloriable, il faut et il suffit que tous ses sous graphes finis le soient.

Exercice 5. *Sous Ensembles Indépendants*

On se place dans le calcul propositionel avec un ensemble de propositions dénombrables $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

On dit que deux ensembles de formules $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont *équivalents* si toute formule $F \in \mathcal{E}$ est conséquence de $\mathcal{E}'$ et toute formule $F' \in \mathcal{E}'$ est conséquence de $\mathcal{E}$.

On dit qu'un ensemble de formules $\mathcal{E}$ est *indépendant* si, pour toute formule $F \in \mathcal{E}$, F n'est pas conséquence de $\mathcal{E} \setminus \{F\}$.

1. Montrez que les ensembles suivants sont indépendants :
   - $\{A_0 \vee A_1, \neg A_0 \vee A_1, A_0 \vee \neg A_1, \neg A_0 \vee \neg A_1\}$
   - $\{A_0, A_0 \to A_1, (A_0 \wedge A_1) \to A_2\}$
2. L'ensemble vide est-il indépendant ? Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble contenant une unique formule soit indépendant.
3. Montrez que pour tout ensemble fini de formules $\mathcal{E}$, il existe un sous-ensemble de formules $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}'$ est indépendant et équivalent à $\mathcal{E}$.
4. Donnez un ensemble dénombrable de formules $\mathcal{E}$ tel que pour tout sous-ensemble de formule $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, soit $\mathcal{E}'$ n'est pas indépendant soit $\mathcal{E}'$ n'est pas équivalent à $\mathcal{E}$.
5. La question précédente nous dit donc que l'on ne peut pas généraliser la question 3 au cas dénombrable. On peut cependant obtenir un résultat plus faible. On commence par un résultat intérmédiaire :

   Montrez que pour tout ensemble dénombrable de formules $\mathcal{E}$, il existe $\{F_0, F_1, \ldots\} \subseteq \mathcal{E}$ équivalent à $\mathcal{E}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule F_n n'est pas conséquence de $\{F_0, \cdots, F_{n-1}\}$.
6. Montrez que pour tout ensemble dénombrable de formules $\mathcal{E}$, il existe un ensemble de formules indépendant qui lui est équivalent.

À faire chez soi : Questions de cours

— Enoncer et démontrer le lemme de lecture unique pour les formules du calcul propositionnel

— Montrer qu'il y a une bijection entre les formules du calcul propositionnel et les arbres tels que :

- Les feuilles sont étiquetées par des variables
- Les noeuds internes sont étiquetés par des connecteurs logiques : ceux étiquetés par "non" ont un fils, les autres en ont deux
- Précision : les fils droits et gauches ne sont pas interchangeables

— Montrer que toute fonction ν de l'ensemble P des variables dans $\{0,1\}$ peut s'étendre de manière unique en une fonction μ de lensemble F des formules du calcul propositionnel sur les variables P dans $\{0,1\}$ qui vérifie : pour toutes formules F et G,

- $\mu(\neg F) = 1 - \mu(F)$
- $\mu(F \vee G) = 1 \iff \mu(F) = 1 \vee \mu(G) = 1$
- $\mu(F \wedge G) = \mu(F) \times \mu(G)$
- $\mu(F \implies G) = 1 \iff (\mu(G) = 1 \vee \mu(F) = 0)$
- $\mu(F \iff G) = 1 \iff \mu(F) = \mu(G)$

— Enoncer le théorème de compacité du calcul propositionnel (une des versions)

— Prouver le théorème de compacité du calcul propositionnel dans le cas où l'ensemble des variables est au plus dénombrable.