TD10

Exercice 1. *Prouver que c'est prouvable*

Dans cet exercice, $\mathrm{Dem}(x, y)$ est une formule qui représente l'ensemble

$$\{(a, b) \mid b \text{ est le code d'une preuve dans PA de la formule représentée par le code de } a\}$$

Parmi les assertions suivantes, quelles sont celles qui sont vraies pour toutes les formules closes F ?

1. $\mathbb{N} \models F \to \exists x\, \mathrm{Dem}(\#F, x)$
2. $\mathrm{PA} \vdash F \to \exists x\, \mathrm{Dem}(\#F, x)$
3. $\mathbb{N} \models \exists x\, Dem(\#F, x) \to F$
4. $\mathrm{PA} \vdash \exists x\, \mathrm{Dem}(\#F, x) \to F$

Exercice 2. *La barbe*

✎ Montrer qu'il n'existe pas d'«ensemble de tous les ensembles». Plus précisément établir que si $\mathfrak{U}$ est un modèle de ZF, alors $\mathfrak{U} \models \neg\exists v_0 \forall v_1 \quad v_1 \in v_0$.

Exercice 3. *Le vide n'est pas vide car il y a du vide dedans*

Dans cet exercice, la relation $\in$ est interprétée comme la relation d'appartenance usuelle.

1. Démontrer que $\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\varnothing), \in \rangle$ est un modèle de ZF sans l'axiome de l'infini, où $\mathcal{P}^n$ désigne n itérations de l'opérateur "ensemble des parties"

On note $\mathbf{0} = \varnothing$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{n+1} = \{\mathbf{n}\}$. Aussi, on définit $2\mathbf{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \ldots\}$ et $2\mathbf{N} + 1 = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \ldots\}$.

2. Démontrer que
$$\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\varnothing) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathcal{P}^n(2\mathbf{N}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathcal{P}^n(2\mathbf{N}+1), \in \rangle$$
satisfait aux axiomes d'extensionnalité, de réunion, des parties et de compréhension, mais pas à l'axiome de la paire.
3. En déduire que l'axiome de la paire n'est pas conséquence des axiomes de ZF (moins l'axiome de l'infini) où l'on a remplacé le schéma de substitution par le schéma de compréhension.

Exercice 4. *L'axiome de fondation*

On définit l'*axiome de fondation* par

$$\mathrm{Fond} := \forall x \quad \neg x = \varnothing \to (\exists y \quad y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)$$

✎ Montrer que $$\mathrm{ZF}, \mathrm{Fond} \vdash \forall x \quad x \notin x$$

Exercice 5. *Des chiffres et des chiffres*

On désigne par W l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur W et soit ε la relation binaire définie sur $\mathbb{N}$ telle que : pour tous entiers x et y,

$$x\, \varepsilon_\varphi\, y \text{ si et seulement si } x \in \varphi(y)$$

1. Montrer que l'univers $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_\varphi \rangle$ satisfait tous les axiomes de ZF à l'exception de l'axiome de l'infini.
2. Montrer que si, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, $x \in \varphi(y)$ implique $x < y$, alors $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_\varphi \rangle$ satisfait aussi l'axiome de fondation.
3. Trouver φ_1 et φ_2 tels que $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_{\varphi_1} \rangle$ satisfait l'axiome de fondation, mais $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_{\varphi_2} \rangle$ ne le satisfait pas.

Axiomes de ZF

Extensionalité $\forall x, y.\ x = y \leftrightarrow (\forall z.\ z \in x \leftrightarrow z \in y)$
Paire $\forall x, y.\ \exists z.\ \forall t.\ (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$
Réunion $\forall x.\ \exists y.\ \forall t.\ (t \in y \leftrightarrow \exists z.\ t \in z \wedge z \in x)$
Parties $\forall x.\ \exists y.\ \forall t.\ (t \in y \leftrightarrow t \subseteq x)$ avec $t \subseteq x$ un raccourci pour $\forall s.\ s \in z \to s \in x)$
Substitution On définit le fait que $\varphi(\cdot, \cdot, v_1, \ldots, v_n)$ soit une relation fonctionnelle :

$$fonc_\varphi(v_1, \ldots, v_n) \equiv \forall x, y_1, y_2.\ \varphi(x, y_1, v_1, \ldots, v_n) \wedge \varphi(x, y_2, v_1, \ldots, v_n) \to y_1 = y_2$$

Le schéma de substitution (appliqué à φ) est alors :

$$\forall v_1, \ldots, v_n.\ fonc_\varphi(v_1, \ldots, v_n) \to \forall X.\ \exists Y.\ \forall y.\ (y \in Y \leftrightarrow \exists x.\ x \in X \wedge \varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n))$$

Compréhension $\forall v_1 \ldots \forall v_n.\ \forall x.\ \exists y.\ \forall t.\ (t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge \varphi(t, v_1, \ldots, v_n)]$
Infini $\exists x.\ \varnothing \in x \wedge \forall y.\ (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)$

Substitution et de compréhension sont équivalentes (en présence des 4 premiers axiomes). L'axiome de paire est prouvable avec les axiomes d'extensionalité, réunion, parties, et substitution.

À faire chez soi : Questions de cours

— Montrer que dans tout modèle de ZF (même en omettant l'axiome de l'infini), il existe un unique ensemble sans éléments.
— Prouver les axiomes de parties et de substitution impliquent l'axiome de la paire.
— Montrer que l'axiome de substitution implique l'axiome de compréhension.
— Montrer que dans tout modèle de ZF, le produit de deux ensembles existe.
— Montrer que dans tout modèle de ZF, si A et B sont des ensembles, alors la collection des fonctions de A dans B est un ensemble.
— Montrer que dans tout modèle de ZF, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles indexée par l'ensemble I, alors l'union, l'intersection, et le produit des A_i sont des ensembles.