TD2

Exercice 1.
On rappelle qu'une clause conjonctive est une formule de la forme $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, où chaque x_i est un littéral ; qu'une formule est dite sous forme normale disjonctive si et seulement si elle s'écrit comme une disjonction de clauses conjonctives ; que cette formule est dite sous forme normale disjonctive canonique si chaque variable apparaît une unique fois dans chaque clause, et si les clauses ne se répètent pas [1].

1. Montrer que toute formule non toujours fausse admet une unique écriture sous forme normale disjonctive canonique (à l'ordre des facteurs près).
2. De même, montrer que toute formule non toujours vraie admet une unique écriture sous forme normale conjonctive canonique.

Exercice 2.
Ecrire les arbres de preuve pour les propriétés suivantes :

1. $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$
2. $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
3. $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
4. $P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
5. $P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
6. $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
7. $\exists x \, \neg A \leftrightarrow \neg(\forall x \, A)$
8. $(\forall x \, A \wedge \forall x \, B) \leftrightarrow \forall x \, (A \wedge B)$

Exercice 3.
Dans un ensemble de règles, une règle d'inférence peut être redondante au sens où elle est "admissible " ou "dérivable". Une règle dérivable est une règle dont la conclusion peut être dérivée de ses prémisses en utilisant les autres règles. Une règle admissible est une règle dont la conclusion est dérivable, quand les prémisses sont dérivables.

1. Quel lien y a-t-il entre ces deux propriétés ?
2. Montrer que la règle suivante est dérivable : $\dfrac{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow C \qquad \Gamma \vdash C \Leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}$
3. Montrer que la règle suivante est dérivable : $\dfrac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$ contraction
4. Montrer que la règle suivante est dérivable dans le système sans $\bot_c$: $\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\neg(A \vee \neg A)}$ n.c.
5. Montrer que la règle d'affaiblissement est admissible mais pas dérivable (dans le système sans la règle d'affaiblissement...).

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout ensemble fini E et tout ordre partiel $\leq_p$ sur cet ensemble, cet ordre est prolongeable en un ordre total sur E.

1. On considère l'égalité de clauses à «ordre des littéraux près».

2. Montrer que le résultat est toujours vrai si E est infini.

Exercice 5. *Oh my god ! They killed König !*

Un graphe G est une relation binaire sur un ensemble V qui est symétrique et antiréflexive. On dit que G est infini si V l'est. On dit aussi que G est localement fini si pour chaque $v \in V$ l'ensemble $\{u \in V \mid (u,v) \in G\}$ est fini.

Un chemin de longueur n sur G est une fonction $x : \{0,\ldots,n\} \to V$ qui est injective et pour chaque $i \leq n-1$, on a $(x(i), x(i+1)) \in G$. On dit que G est connexe si pour chaque pair de sommets $v_1, v_2 \in V^2$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et un chemin x de longueur n tel que $x(0) = v_1$ et $x(n) = v_2$. On dit aussi qu'une fonction $y : \mathbb{N} \to V$ est un chemin infini si pour tout $m \in \mathbb{N}$ la restriction de y a $\{0,\ldots,m\}$ est un chemin de longeur m.

L'objectif de cet exercice est de démontrer le lemme de König. Soit G un graphe connexe, infini et localement fini. Alors pour chaque sommet $v_0 \in V$ il existe un chemin infini qui commence en v_0.

1. Montrer que le lemme est faux si G n'est pas localement fini.

Soit $v_0 \in V$ un sommet. On construit par induction les ensembles $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $V_0 = \{v_0\}$ et pour tout $n \geq 1$, $V_n = \{v \in V \mid \exists u \in V_{n-1}, (u,v) \in G\} \setminus \bigcup\limits_{m<n} V_m$.

2. Que représente chaque V_n ? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $V_n \neq \varnothing$ et V_n fini.
3. Considérons pour chaque $v \in V$ la variable propositionnelle A_v signifiant "v est activé". Construire une formule C_n qui est vraie si et seulement si l'ensemble des sommets activés dans $\bigcup\limits_{m\leq n} V_m$ forment un chemin de longueur n commençant en v_0 et finissant dans un sommet de V_n.
4. Conclure.

Exercice 6. *Cantor-Bernstein-Schröder*

On suppose (jusqu'à ce qu'on l'ait montré) le Théorème de Cantor-Bernstein-Schröder :

Théorème (Cantor-Bernstein-Schröder). *S'ils existent $f : A \hookrightarrow B$ et $g : B \hookrightarrow A$, alors il existe $h : A \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow B$.*

1. Montrer que si $f : X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X \times X$, avec X infini, alors $\exists g : \mathcal{P}(X) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$
2. Montrer que $\exists f : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$
3. En déduire que $\exists g : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Maintenant on le démontre, deux fois !

4. Lemme : Si $B \subseteq A$ et si $f : A \hookrightarrow B$, alors $\exists g : A \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow B$ (utiliser $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^n(A \setminus B)$). En déduire le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder.
5. Lemme : si $G : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ est telle que $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A), X \subseteq Y \Rightarrow G(X) \subseteq G(Y)$, alors $\exists M, G(M) = M$. En déduire le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder avec $G : X \mapsto A \setminus g(B \setminus f(X))$

Définition (Règles de déductions naturelles)**.** On redonne ici les règles de la déduction naturelle classique.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\text{ ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\text{ aff} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\bot_c$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\wedge_e^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_i^g \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_i^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\vee_e$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x \quad A}\forall_i\ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x \quad A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \quad A}\exists_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x \quad A \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\exists_e\ (x \notin VL(\Gamma, C))$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}=_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := t] \qquad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}=_e$$

À faire chez soi : Questions de cours

- Énoncer et prouver un lemme de lecture unique pour les termes de la logique du premier ordre dans un langage donné L.
- Énoncer et prouver un lemme de bijection entre certains arbres étiquetés et les termes de la logique du premier ordre dans un langage donné L.
- Énoncer et prouver un lemme de lecture unique pour les formules de la logique du premier ordre dans un langage donné L.
- Donner une preuve en déduction naturelle de "non A equ à (A implique absurde)" (les règles de déductions seront rappelées dans l'énoncé)