TD4

Exercice 1. *Un peu d'arithmétique*

Soit $\mathcal{L} = \{R, S\}$ où R (resp. S) est un symbole de relation unaire (resp. binaire). On considère l'interprétation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ dont l'ensemble de base est $|\mathcal{M}| = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ et dans laquelle l'interprétation de R (resp. de S) est la relation «être premier» (resp. «diviser»). Pour chacune des formules suivantes (à une variable libre x), indiquer l'ensemble des éléments de $|\mathcal{M}|$ qui la satisfont [1].

1. $\forall y \quad S(y,x) \to x = y$
2. $\forall y \quad S(y,x) \land x \neq y \to R(y)$
3. $\forall y \quad \forall z \quad R(y) \land R(z) \land S(y,x) \land S(z,x) \to y = z$
4. $\forall y \quad \forall z \quad S(y,x) \land S(z,x) \to S(y,z) \lor S(z,y)$
5. $\forall y \quad \exists z \quad \exists t \quad \neg R(y) \land S(y,x) \to R(z) \land R(t) \land z \neq t \land S(z,y) \land S(t,y)$

Exercice 2. *Complétude du calcul propositionnel*

Le but de l'exercice est de démontrer, dans le calcul propositionnel, que si F est une tautologie (i.e. si pour toute valuation v, $v(F) = 1$), alors on a $\vdash F$. Fixons un ensemble fini $\mathcal{V} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de variables propositionnelles. Pour une valuation v, on appelle $\varphi(v)$ la formule $\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon_i X_i$, avec ε_i égal au mot vide si $v(X_i) = 1$ et égal au symbole $\neg$ si $v(X_i) = 0$.

1. Démontrer que $\vdash \bigvee\{\varphi(v) \ / \ v \text{ valuation sur } \mathcal{V}\}$.
2. Démontrer que, pour tout valuation v et toute formule F à variables dans $\mathcal{V}$, si $v(F) = 1$, alors $\varphi(v) \vdash F$, et si $v(F) = 0$, alors $\varphi(v) \vdash \neg F$.
3. Soit F une tautologie à variables dans $\mathcal{V}$. Démontrer que $\bigvee\{\varphi(v) \ / \ v \text{ valuation sur } \mathcal{V}\} \vdash F$.
4. Conclure.

Exercice 3. *Isomorphisme*

1. Rappeler la définition d'une interprétation d'un langage et d'un morphisme d'interprétations.
2. Montrer que si un morphisme d'interprétations est bijectif, alors sa réciproque est aussi un morphisme.
3. On considère le langage $\mathcal{L} = \{a, f\}$ où a est une constante et f est une fonction binaire ainsi que les deux interprétations suivantes :

   — $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}_+^*$, $a_{\mathcal{M}} = 1$ et $f_{\mathcal{M}}$ est la multiplication.
   — $|\mathcal{N}| = \mathbb{R}$, $a_{\mathcal{N}} = 0$ et $f_{\mathcal{N}}$ est l'addition.

   Montrer qu'elles sont isomorphes.
4. On considère le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation binaire ainsi que les deux interprétations suivantes :

   — $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}$ et $R_{\mathcal{M}}$ est la relation $\leq$.
   — $|\mathcal{N}| =]\,0\,;1\,[$ et $R_{\mathcal{N}}$ est la relation $\leq$.

   Montrer qu'elles sont isomorphes.

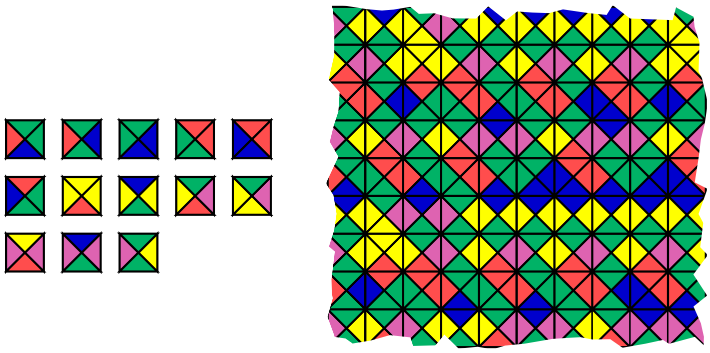
1. Autrement dit, l'ensemble des environnements dans lesquels ces formules sont vraies.

5. On considère le langage $\mathcal{L} = \{c, f, S\}$ où c est une constante, f une fonction binaire et S une relation binaire. Donner deux interprétations isomorphes et deux interprétations non isomorphes.

Exercice 4. *Wang*

Soit A un ensemble fini de tuiles carrées dont chaque bord est colorié. On code chaque tuile comme un 4-tuple (N, W, S, E) qui donne la couleur correspondante à chacun des bords. Un pavage est une application de $\mathbb{Z}^2$ dans A telle que deux tuiles qui sont côte à côte *via* cette application ont le bord commun de la même couleur. On dit que A pave le plan s'il existe un pavage.

Exemple.



✎ Pour tout ensemble de tuiles, montrer que cet ensemble pave le plan si et seulement s'il pave toute partie finie du plan.

Exercice 5. *Cantor-Bernstein-Schröder*

On suppose (jusqu'à ce qu'on l'ait montré) le Théorème de Cantor-Bernstein-Schröder :

Théorème (Cantor-Bernstein-Schröder)**.** *S'ils existent $f : A \hookrightarrow B$ et $g : B \hookrightarrow A$, alors il existe $h : A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow B$.*

1. Montrer que si $f : X \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow X \times X$, avec X infini, alors $\exists g : \mathcal{P}(X) \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$
2. Montrer que $\exists f : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$
3. En déduire que $\exists g : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Maintenant on le démontre, deux fois !

4. Lemme : Si $B \subseteq A$ et si $f : A \hookrightarrow B$, alors $\exists g : A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow B$ (utiliser $C = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A \setminus B)$). En déduire le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder.
5. Lemme : si $G : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ est telle que $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A), X \subseteq Y \Rightarrow G(X) \subseteq G(Y)$, alors $\exists M, G(M) = M$. En déduire le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder avec $G : X \mapsto A \setminus g\,(B \setminus f(X))$

À faire chez soi : Questions de cours

Cours 3

— Montrer que pour toute interprétation M sur le langage L, tout environnement e et toute formule F, $Val_M(F,e)$ ne dépend que de la valeur de e sur les variables libres de F.

— Montrer que pour toute interprétation M sur le langage L, tout environnement e et toute formule close F, $Val_M(F,e)$ ne dépend pas de e.

— Montrer la proposition suivante : Soient L et L' deux langages, M (resp M') une interprétation de L (resp L') et M' un enrichissement de M, e un environnement, alors :

- Si t est un terme de L, $Val_M(t,e) = Val_{M'}(t,e)$
- Si F est une formule de L, alors (M,e) satisfait F ssi (M',e) satisfait F

— On dit que deux formules F et G du premier ordre sont équivalentes si $F \leftrightarrow G$ est un théorème, c'est à dire si le vide prouve $F \leftrightarrow G$. Montrer que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs logiques $\neg$, $\vee$ et $\exists$.

— Montrer que si M et N sont deux interprétations de L et φ un morphisme de M dans N, alors pour tout terme t et tout environnement e dans M on a

$$\varphi\left(Val_M(t,e)\right) = Val_N(t,\varphi(e))$$

— Montrer que si M et N sont deux interprétations de L et φ un morphisme injectif de M dans N, alors pour toute formule atomique F et tout environnement e dans M on a

$$M,e \models F \quad \text{ssi} \quad N,\varphi(e) \models F$$

— Montrer que si M et N sont deux interprétations de L et φ un isomorphisme de M dans N, alors pour toute formule F et tout environnement e dans M on a

$$M,e \models F \quad \text{ssi} \quad N,\varphi(e) \models F$$

— Montrer que deux interprétations isomorphes satisfont les mêmes formules closes.

Cours 4

— Énoncer les deux versions vues en cours du théorème de complétude de Gödel pour la logique du premier ordre. Indiquer quel est le sens « correction » et quel est le sens « complétude ».

— Montrer que les deux versions sont équivalentes.

— Énoncer le théorème de compacité (sémantique) de la logique du premier ordre.

— En admettant le théorème de complétude, montrer le théorème de compacité de la logique du premier ordre.