TD5

Exercice 1. *Isomorphisme*

1. Rappeler la définition d'une interprétation d'un langage et d'un morphisme d'interprétations.
2. Montrer que si un morphisme d'interprétations est bijectif, alors sa réciproque est aussi un morphisme.
3. On considère le langage $\mathcal{L} = \{a, f\}$ où a est une constante et f est une fonction binaire ainsi que les deux interprétations suivantes :
   — $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}_+^*$, $a_\mathcal{M} = 1$ et $f_\mathcal{M}$ est la multiplication.
   — $|\mathcal{N}| = \mathbb{R}$, $a_\mathcal{N} = 0$ et $f_\mathcal{N}$ est l'addition.

   Montrer qu'elles sont isomorphes.
4. On considère le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation binaire ainsi que les deux interprétations suivantes :
   — $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}$ et $R_\mathcal{M}$ est la relation $\leq$.
   — $|\mathcal{N}| =]\,0\,;1\,[$ et $R_\mathcal{N}$ est la relation $\leq$.

   Montrer qu'elles sont isomorphes.
5. On considère le langage $\mathcal{L} = \{c, f, S\}$ où c est une constante, f une fonction binaire et S une relation binaire. Donner deux interprétations isomorphes et deux interprétations non isomorphes.

Exercice 2.

✎ Montrer que si une théorie T admet des modèles de tailles arbitrairement grandes, alors elle admet un modèle de taille infinie.

Exercice 3. *Build edges, not cuts*

Dans cet exercice, le mot *graphe* désigne un graphe non orienté et simple : il y a au plus une seule arête entre deux sommets, et aucune arête ne relie un sommet à lui-même. Un graphe est dit *connexe* si l'on peut relier tout couple de sommets distincts par des arêtes. Autrement dit, pour tout couple de sommets disctincts x et y, il existe un chemin de x à y. La longueur de ce chemin est son nombre d'arêtes. Un chemin peut passer plusieurs fois par les mêmes sommets.
On se place dans le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ formé uniquement d'un symbole de prédicat binaire R (bien sûr, on a aussi comme toujours l'égalité).

1. Donner les axiomes de la théorie A des graphes non orientés et simples.

Soit le nouveau langage $\mathcal{L}' = \{R, a, b\}$ où a et b sont des symboles de constantes.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une formule φ_n de $\mathcal{L}'$ telle que pour toute structure sur $\mathcal{L}'$ qui soit un graphe G, la formule φ_n est vraie dans G si et seulement s'il n'existe pas de chemin de longueur n entre l'interprétation de a et l'interprétation de b dans G.
3. Soient $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Est-ce que $A \cup \{\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}\}$ a un modèle connexe ?
4. Montrer qu'il n'existe pas de théorie des graphes connexes, *ie* de théorie dont les modèles sont exactement les graphes connexes.

Exercice 4.
Soit $\mathcal{L} = \{<\}$, où $<$ est une relation binaire. Soit T la $\mathcal{L}$-théorie dont les modèles sont les ordres totaux denses sans extrémités.
Rappel : Un ordre est *dense* si, entre deux points distincts, il en existe toujours un troisième distincts des deux premiers. Un ordre est *sans extrémités* s'il n'a ni plus grand ni plus petit élément.

1. Quels sont les axiomes de T ?
2. Démontrer que si M est un modèle de T, alors M est infini.
3. Soient M et N deux modèles de T dénombrables. On considère la famille $\mathcal{I}$ des fonctions f ayant un domaine fini $A \subset M$ et une image fini $B \subset N$, telles que $f : A \to B$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}$-structures. Montrez que cette famille a la propriété du *va-et-vient*, c'est-à-dire, pour tout $f \in \mathcal{I}$ et $a \in M$, $b \in N$,
   - Il existe $g \in \mathcal{I}$, $f \subset g$ et $a \in \mathrm{dom}(g)$.
   - Il existe $h \in \mathcal{I}$, $f \subset h$ et $b \in \mathrm{Image}(h)$.

   Pour $f : A \to B$, $g : A' \to B'$, on dit que $f \subset g$ si : $A \subset A'$, $B \subset B'$ et $g(a) = f(a)\ \forall a \in A$.
4. Soient M et N deux modèles de T dénombrables, montrer que M et N sont $\mathcal{L}$-structures isomorphes.
   (*Suggestion :* Considérer des énumérations $(a_n)_{n\in\omega}$ et $(b_n)_{n\in\omega}$ de M et N ; construire par induction un isomorphisme $f = \bigcup_n f_n$ de domaine $\bigcup_n \mathrm{dom}(f_n) = M$ et d'image $\bigcup_n \mathrm{Image}(f_n) = N$).
5. Est-ce que tous les modéles de T sont isomorphes ?
6. Déduire que la théorie T est complète.
   (*Suggestion :* Utiliser (sans le demontrer) le fait que, si T est une théorie non contradictoire contenant un nombre fini d'axiomes, alors T a un modèle denombrable).

À faire chez soi : Questions de cours

— Donner la définition de théorie complète en logique du premier ordre.

— Sans utiliser le théorème de complétude, montrer que si T est une théorie cohérente (qui ne prouve pas l'absurde) dans un langage au plus dénombrable L, alors il existe une théorie complète T' contenant T.
Il y a-t-il une preuve plus simple en utilisant le théorème de complétude ?

— Rappeler ce qu'est une relation d'équivalence.

— Dans une théorie complète T, on définit la relation # suivante sur l'ensemble des termes :

$$t\#t' \iff T \vdash t = t'$$

Sans utiliser le théorème de complétude, montrer que # est une relation d'équivalence.