TD6

Exercice 1.
Soit $\mathcal{M}$ l'interprétation du langage de l'arithmétique dont l'ensemble de base est

$$|\mathcal{M}| = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\{1,2\} \times \mathbb{Z})$$

L'interprétation des symboles est la suivante :

$$\begin{aligned}
0_{\mathcal{M}} &= (0,0) \\
S_{\mathcal{M}}((i,n)) &= (i, n+1) \qquad \text{pour} \qquad i = 0,1,2 \\
\\
(0,n) +_{\mathcal{M}} (i,m) &= (i,m) +_{\mathcal{M}} (0,n) = (i, m+n) \qquad \text{pour} \qquad i = 0,1,2 \qquad \text{et} \\
(i,n) +_{\mathcal{M}} (j,m) &= (i, n+m) \qquad \text{pour} \qquad i,j = 1,2 \\
\\
(0,0) \times_{\mathcal{M}} (i,m) &= (i,m) \times_{\mathcal{M}} (0,0) = (0,0) \qquad \text{pour tous} \qquad i,m \\
(0,n) \times_{\mathcal{M}} (i,m) &= (i,m) \times_{\mathcal{M}} (0,n) = (i, n \cdot m) \qquad \text{pour} \qquad i = 0,1,2 \qquad \text{si} \qquad n \neq 0 \qquad \text{et} \\
(i,n) \times_{\mathcal{M}} (j,m) &= (i, n \cdot m) \qquad \text{pour} \qquad i,j = 1,2
\end{aligned}$$

1. Montrer de manière non constructive qu'il existe un modèle de P_0 non isomorphe à $\mathbb{N}$.
2. Montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathbb{N}$ sont deux modèles non isomorphes de P_0.
3. La théorie P_0 est elle complète ?

Exercice 2.
Montrer les résultats suivants.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_0 \vdash \neg S^{n+1}\,0 = S^n\,0$.
2. $\mathrm{PA} \vdash \forall x \quad \neg S\,x = x$.
3. $\mathrm{P}_0 \nvdash \forall x\, \neg S\,x = x$.

Exercice 3. *Mais oui, mon gros beta...*

1. On définit la fonction β de Gödel de la manière suivante :

   $$\beta(i,a,b) = \text{ le reste de la division euclidienne de } b \text{ par } a(i+1)+1$$

   Montrer que la fonction β est représentable.
2. Soit $(n_1, \ldots, n_k)$ une suite d'entiers. Soit $m \geq k$ un entier tel que $a = m!$ satisfait $a > n_i$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$. Montrer que les nombres $a(i+1)+1$, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, sont premiers entre eux deux à deux. Montrer qu'il existe un entier b tel que b est congru à n_i modulo $a(i+1)+1$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$.

   Indice : Utiliser le théorème de restes chinois qui implique que, pour tout ensemble $\{a_1, \ldots, a_k\}$ d'entiers distincts et premiers deux à deux et tout k-uple $(n_1, \ldots, n_k)$ tel que $0 \leq n_i < a_i\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$, il existe un entier x tel que $x \equiv n_i \pmod{a_i}\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$.
3. En déduire que, pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a $\beta(i,a,b) = n_i$.
4. Montrer que la fonction exponentielle $f_m(n) = m^n$ est représentable.

5. Donner une formule qui exprime le théorème de Fermat : pour tout $n > 2$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet par de solution entière non-triviale (i.e., où $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$).

6. On pourrait penser que n'importe quel codage de suites finies d'entiers convient. Par exemple, considérons celui beaucoup plus simple défini de la manière suivante : la suite $(i_1, \ldots, i_n)$ est codée par l'entier $2^{1+i_1} \cdot 3^{1+i_2} \cdots p_n^{1+i_n}$, où p_n est le n-ème nombre premier. Pourquoi celà ne marche-t-il pas ?

Exercice 4.
Soit $\mathcal{L} = \{<\}$, où $<$ est une relation binaire. Soit T la $\mathcal{L}$-théorie dont les modèles sont les ordres totaux denses sans extrémités.
Rappel : Un ordre est *dense* si, entre deux points distincts, il en existe toujours un troisième distincts des deux premiers. Un ordre est *sans extrémités* s'il n'a ni plus grand ni plus petit élément.

1. Quels sont les axiomes de T ?

2. Démontrer que si M est un modèle de T, alors M est infini.

3. Soient M et N deux modèles de T dénombrables. On considère la famille $\mathcal{I}$ des fonctions f ayant un domaine fini $A \subset M$ et une image fini $B \subset N$, telles que $f : A \to B$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}$-structures. Montrez que cette famille a la propriété du *va-et-vient*, c'est-à-dire, pour tout $f \in \mathcal{I}$ et $a \in M$, $b \in N$,

   - Il existe $g \in \mathcal{I}$, $f \subset g$ et $a \in \mathrm{dom}(g)$.
   - Il existe $h \in \mathcal{I}$, $f \subset h$ et $b \in \mathrm{Image}(h)$.

   Pour $f : A \to B$, $g : A' \to B'$, on dit que $f \subset g$ si : $A \subset A'$, $B \subset B'$ et $g(a) = f(a)\ \forall a \in A$.

4. Soient M et N deux modèles de T dénombrables, montrer que M et N sont $\mathcal{L}$-structures isomorphes.
   (*Suggestion :* Considérer des énumérations $(a_n)_{n\in\omega}$ et $(b_n)_{n\in\omega}$ de M et N ; construire par induction un isomorphisme $f = \bigcup_n f_n$ de domaine $\bigcup_n \mathrm{dom}(f_n) = M$ et d'image $\bigcup_n \mathrm{Image}(f_n) = N$).

5. Est-ce que tous les modéles de T sont isomorphes ?

6. Déduire que la théorie T est complète.
   (*Suggestion :* Utiliser (sans le demontrer) le fait que, si T est une théorie non contradictoire contenant un nombre fini d'axiomes, alors T a un modèle denombrable).

À faire chez soi : Questions de cours

— Dans l'arithmétique de Peano, prouver $\forall x,\ \forall y,\ x + y = y + x$.

— Énoncer le théorème de représentation.

— Prouver qu'un ensemble est représentable si est seulement si sa fonction indicatrice l'est.