

Informatique
DS du 22 Novembre 2023
Corrigé partiel

1 Sous-tableau maximal

Dans toute cette partie 1, on pourra utiliser la fonction Python `max`.

Soit x une liste d'entiers **possiblement négatifs ou nuls**. On cherche à calculer la somme maximale d'éléments consécutifs de x , c'est-à-dire

$$\max \left\{ x[p] + \dots + x[g-1] = \sum_{i=p}^{g-1} x[i] \mid 0 \leq p \leq g \leq \text{len}(x) \right\}$$

Par exemple, avec

$$x = [-6, 12, -7, 0, 14, -7, 5]$$

la somme maximale d'éléments consécutifs de x est 19 ($= 12 - 7 + 0 + 14$).

Par convention, on pose $\sum_{i=p}^{g-1} x[i] = 0$ lorsque $p = g$. Ainsi, la somme maximale d'éléments consécutifs de la liste $[-3, -4]$ est 0.

1.1 Solution en temps linéaire

Fixons une liste x . Étant donné un entier k tel que $0 \leq k \leq \text{len}(x)$, notons

$$\begin{aligned} \text{maxsum}_k &= \max \left\{ x[p] + \dots + x[g-1] = \sum_{i=p}^{g-1} x[i] \mid 0 \leq p \leq g \leq k \right\} \\ \text{maxnow}_k &= \max \left\{ x[p] + \dots + x[k-1] = \sum_{i=p}^{k-1} x[i] \mid 0 \leq p \leq k \right\} \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a toujours $0 \leq \text{maxnow}_k \leq \text{maxsum}_k$.

Question* 1. *Supposons $k < \text{len}(x)$.*

(1) *Exprimer maxsum_{k+1} en fonction de maxsum_k et maxnow_{k+1} .*

(2) *Exprimer maxnow_{k+1} en fonction de maxnow_k et $x[k]$.*

CORRECTION.

(1) $\text{maxsum}_{k+1} = \max \{ \text{maxsum}_k, \text{maxnow}_{k+1} \}$

(2) $\text{maxnow}_{k+1} = \max \{ 0, \text{maxnow}_k + x[k] \}$

Attention, comme $\text{maxnow}_k \geq 0$, on a

$$\max \{ 0, x[k], \text{maxnow}_k + x[k] \} = \max \{ 0, \text{maxnow}_k + x[k] \}$$

□

Question* 2. *En déduire une fonction Python qui prend en argument une liste d'entiers x et qui renvoie la somme maximale d'éléments consécutifs de x . Cette fonction doit effectuer un nombre d'additions proportionnel à $\text{len}(x)$, et ne pas utiliser la fonction `sum`.*

CORRECTION.

```
def maxsubarray(x) :  
    maxnow = 0  
    maxsum = 0  
    for i in range(len(x)) :  
        maxnow = max(0,maxnow+x[i])  
        # maxnow(0,x[i],maxnow+x[i]) = maxnow(0,maxnow+x[i])  
        # car on a toujours maxnow >= 0  
        maxsum = max(maxnow,maxsum)  
    return maxsum
```

□

```
* *  
*
```