



Ecole Normale Supérieure de Lyon

Rapport de stage de Licence

Encadrants :

Jérémie CHALOPIN et Victor CHEPOÏ

Jeu du gendarme et du voleur avec vitesses et δ -Hyperbolicité

Timothée PECATTE

Du 4 juin au 13 juillet 2012



LABORATOIRE
D'INFORMATIQUE
FONDAMENTALE
de Marseille



Equipe ACRO et MoVe
Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille

Table des matières

Introduction	2
1 Jeu du gendarme et du voleur et δ-hyperbolicité	3
1.1 Jeu du gendarme et du voleur	3
1.2 δ -Hyperbolicité	4
1.3 Liens entre les deux	4
2 Classes de graphes	5
2.1 Quelques définitions	5
2.2 Graphes faiblement modulaires	6
2.3 Graphes de Helly	7
2.4 Graphes bridged	8
2.5 Graphes médians	8
2.6 Graphes aux boules convexes	9
3 Preuve du résultat	10
3.1 Une propriété métrique des graphes de $CWFR(s, s - 1)$	10
3.2 Un résultat plus général pour l'hyperbolicité	12
3.3 Triangles métriques des graphes $CWFR(s, s - 1)$ faiblement modulaires .	13
3.4 Preuve du théorème	15
4 Autres approches	15
4.1 Induction	15
4.2 Boules convexes	16
4.3 $G \in CWFR(s, s - 1) \Rightarrow G \in CWFR(s + 1, s)$?	18
4.4 Espace métrique	20
Conclusion	20

Introduction

Ce document constitue le rapport de mon stage de troisième année de licence d'informatique à l'École Normale Supérieure de Lyon. Ce stage a été réalisé au sein du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille, avec pour encadrants Victor CHEPOÏ, membre de l'équipe Algorithmique, Combinatoire et Recherche Opérationnelle (ACRO), et Jérémie CHALOPIN, membre de l'équipe Modélisation et Vérification (MoVe).

En 2011, J. Chalopin, V. Chepoi, N. Nisse, Y. Vaxès ont publié un article [3] à propos du jeu du gendarme et du voleur avec vitesses dans lequel ils caractérisent les graphes gagnant pour les gendarmes dans cette variante du jeu. Entre autre, l'article [3] établit quelques liens entre les graphes gagnant et la δ -hyperbolicité, mais des questions sur ces liens restaient ouvertes. L'objectif du stage était donc de se pencher sur ces questions pour découvrir des nouvelles notions, des nouvelles techniques, et éventuellement d'y donner des réponses, même partielles.

Nous vous proposons de rappeler d'abord quelques définitions sur le jeu du gendarme et du voleur, de présenter la notion de δ -hyperbolicité, d'énoncer les liens déjà prouvés entre les deux (dans [3]), et d'exposer le résultat principal trouvé pendant le stage. Nous devons ensuite définir quelques notions métriques et certaines classes de graphes avec lesquelles nous avons travaillé, notamment celle concernée par le résultat principal. Ensuite, nous nous attaquons à la preuve du résultat, en prouvant au préalable plusieurs propositions nécessaires pour obtenir le théorème. Enfin, nous présenterons d'autres approches que nous avons essayées qui pourraient servir pour résoudre la question ouverte. Certaines de ces approches ont donné quelques résultats annexes que nous exposerons et démontrerons.

Je tiens à remercier les différents membres de l'équipe de recherche avec lesquels j'ai pu discuter, et particulièrement mes deux encadrants pour leur disponibilité et leur écoute. Merci également à tous les doctorants et post-doc qui ont partagé leur bureau et leur bonne humeur avec moi.

1 Jeu du gendarme et du voleur et δ -hyperbolicité

1.1 Jeu du gendarme et du voleur

Le jeu du gendarme et du voleur est un jeu de course poursuite sur un graphe. Dans sa version originelle, proposée par Nowakowski, Winkler [8] et Quilliot [9], deux joueurs, un gendarme C (cop) et un voleur R (robber), se déplacent à tour de rôle le long des arêtes d'un graphe fini $G = (V, E)$ non-orienté. Le gendarme capture le voleur si les deux joueurs sont sur un même sommet à une étape du jeu. Un graphe est dit *cop-win* si le gendarme a une stratégie pour capturer le voleur en un temps fini quels que soient les mouvements du voleur. Nowakowski, Winkler, et Quilliot ont donné une caractérisation des graphes cop-win :

Définition 1.1.1 (Démontabilité). *Un sommet u est dit dominé dans G s'il a un voisin v tel que tous les voisins de u (y compris u) sont aussi voisins de v .*

Un graphe G admet un ordre de démontage si on peut ordonner les sommets v_1, v_2, \dots, v_n de G de telle sorte que pour tout i , v_i est dominé dans le graphe induit par les sommets $X_i = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$.

Théorème 1.1. [8] *Un graphe G est cop-win si et seulement si G admet un ordre de démontage.*

Plusieurs variantes du jeu ont été étudiées, en particulier celle où une équipe de gendarmes coopèrent pour attraper le voleur (et non plus un seul gendarme). Pour cette variante, Aigner et Fromme [1] ont montré que si le graphe G est planaire, alors 3 gendarmes peuvent toujours capturer le voleur. Meyniel a conjecturé que pour tout graphe G à n sommets, $O(\sqrt{n})$ gendarmes sont suffisants pour capturer un voleur dans G (la conjecture est encore ouverte).

Plus récemment, Fomin, Golovach, Kratochvil, Nisse et Suchan [6] ont introduit le jeu du gendarme et du voleur rapide (*cop and fast robber game*). Dans cette variante, le voleur a une vitesse $s \geq 1$ i.e., à son tour, il peut se déplacer le long de s arêtes, sous contrainte qu'il ne passe pas par le sommet où se trouve le gendarme. Le gendarme se déplace lui à vitesse 1.

Dans une version plus générale, étudiée par Chalopin, Chepoi, Nisse et Vaxès [3], le voleur R se déplace à vitesse $s \geq 1$, et le policier C se déplace à vitesse $s' \leq s$ (si $s' > s$, le policier peut toujours rattraper le voleur en diminuant à chaque étape la distance entre lui et le voleur). La classe des graphes cop-win pour cette variante est notée $CWFR(s, s')$. Chalopin, Chepoi, Nisse et Vaxès ont de même caractérisé les graphes cop-win pour cette variante :

Définition 1.1.2 (s -voisinage). *Le s -voisinage d'un sommet u dans un graphe G , noté $N_s(u, G)$, est l'ensemble des sommets à distance au plus s de u dans G . S'il n'y a pas d'ambiguïté pour G , on notera simplement $N_s(u)$.*

Définition 1.1.3 ((s, s') -démontable). *Un graphe G est dit (s, s') -démontable si on peut ordonner les sommets v_1, v_2, \dots, v_n de G de telle sorte que pour tout $i < n$, il existe $j > i$ tel que : $N_s(v_i, G \setminus \{v_j\}) \cap X_i \subseteq N_{s'}(v_j, G)$, où $X_i = \{v_i, \dots, v_n\}$ et $G \setminus \{v_j\}$ correspond au graphe induit par l'ensemble de sommets $V \setminus \{v_j\}$.*

Théorème 1.2. [3] Un graphe G est (s, s') -copwin si et seulement il est (s, s') -démontable.

Remarque. Dans la suite, si un sommet v correspond au sommet u_i dans un ordre de démontage, on notera aussi v^+ le sommet u_j qui correspond, et on dira que v^+ élimine v , ou encore que v^+ domine v . De même, si un sommet v correspond au sommet u_i dans un ordre de démontage fixé, on notera l'ensemble X_i défini ci-dessus simplement X_v .

1.2 δ -Hyperbolicité

Pour tout graphe $G = (V, E)$, on peut associer un espace métrique (V, d) où la distance entre deux points est la distance entre les sommets correspondants dans G . Introduite par Gromov [7], la δ -hyperbolicité d'un espace métrique (X, d) permet de mesurer si l'espace métrique est proche d'un espace métrique associé à un arbre (dont l'hyperbolicité est 0).

La δ -hyperbolicité possède plusieurs définitions qui sont équivalentes à un coefficient multiplicatif près. La définition dont nous nous servons est la suivante : un espace métrique (X, d) est δ -hyperbolique si pour tous quadruplets de sommets u, v, w, x de X , lorsqu'on considère les trois sommes $d(u, v) + d(w, x)$, $d(u, w) + d(v, x)$, $d(u, x) + d(v, w)$, alors la différence entre les deux plus grandes de ces sommes est au plus $2\delta \geq 0$. On peut visualiser cette condition à l'aide d'un plongement dans le plan muni de la norme l_1 . En effet, le plongement de 4 points u, v, w, x est représenté Figure 1 et la différence entre les deux plus grandes sommes correspond au côté le plus petit ξ du rectangle. Ainsi, si $\xi \leq \delta$ pour tout quadruplet, alors le graphe G est δ -hyperbolique.

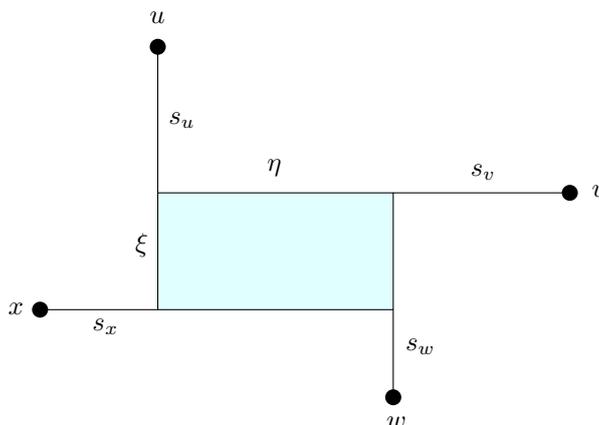


FIGURE 1 – Illustration de la condition de δ -hyperbolicité

1.3 Liens entre les deux

Dans [3], le lien entre le jeu du gendarme et du voleur et le δ -hyperbolicité a été établi dans un sens, de l'hyperbolicité vers le jeu, grâce à la proposition suivante :

Proposition 1.3. [3] Soit G un graphe δ -hyperbolique et $r \geq 2\delta$. Alors G est $(2r, r + 2\delta)$ -démontable, et donc $G \in CWFR(2r, r + 2\delta)$

Ce qui amène naturellement la question suivante :

Question ouverte [3]. Etant donné un graphe $G \in CWFR(s, s')(s > s')$, est ce que le graphe G est $\delta(s)$ -hyperbolique, avec $\delta(s)$ qui ne dépend que de s (et pas de G) ?

Plusieurs choses nous font penser que la réponse est positive. Notamment, dans [3], il a été montré que pour le cas $s \geq 2s'$, tous les graphes $G \in CWFR(s, s')$ sont $(s - 1)$ -hyperboliques. On remarquera que pour répondre à la question dans le cas $s' < s < 2s'$, comme $CWFR(s, s') \subseteq CWFR(s, s' + 1)$, il suffit de montrer que c'est vrai pour le cas particulier $s' = s - 1$.

Remarque. Dans le cas $CWFR(s, s - 1)$, la condition dans l'ordre de démontage est équivalente à $N_s(u_i) \cap X_{u_i} \subseteq N_{s-1}(u_j)$ (plus besoin du $G \setminus \{u_j\}$), car si le voleur passe par la position du gendarme, il va perdre au moins 1 sur sa capacité de mouvement, et se fera donc forcément rattraper par le gendarme.

Il avait déjà été montré dans [3] que la réponse est positive pour les graphes de Helly, et les graphes bridged :

Proposition 1.4. [3] *Si $G \in CWFR(s, s - 1)$ est un graphe de Helly, ou un graphe bridged, alors G est s^2 -hyperbolique.*

Durant le stage, nous avons montré que l'hyperbolicité était linéaire en s pour la classe des graphes faiblement modulaires, ce qui "améliore" le δ , et élargit la classe de graphes considérée.

Théorème 1.5. *Soit $G \in CWFR(s, s - 1)$ un graphe faiblement modulaire. Alors G est $136s$ -hyperbolique.*

2 Classes de graphes

2.1 Quelques définitions

Définition 2.1.1 (Intervalle). *Soit u, v deux sommets quelconque d'un graphe G . L'intervalle de u et v , noté $I(u, v)$ est défini comme l'ensemble des sommets appartenant à une géodésique de u à v .*

Définition 2.1.2 (Triangle métrique). *Un triplet de sommet (u, v, w) d'un graphe G est dit un triangle métrique si $I(u, v) \cap I(u, w) = \{u\}$, $I(v, u) \cap I(v, w) = \{v\}$, $I(w, u) \cap I(w, v) = \{w\}$ (voir Figure 2).*

Définition 2.1.3 (Quasi-médian). *Un triangle métrique (u, v, w) de G est un quasi-médian du triplet x, y, z si les égalités métriques suivantes sont respectées (voir Figure 2) :*

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(x, u) + d(u, v) + d(v, y), \\ d(x, z) &= d(x, u) + d(u, w) + d(w, z), \\ d(y, z) &= d(y, v) + d(v, w) + d(w, z) \end{aligned} \tag{1}$$

Remarque. Un triplet x, y, z possède toujours au moins un quasi-médian. Par exemple, le triangle métrique (u, v, w) construit en choisissant $u \in I(x, y) \cap I(x, z)$ à distance maximale de x , $v \in I(y, u) \cap I(y, z)$ à distance maximale de y , $w \in I(z, u) \cap I(z, v)$ à distance maximale de z , est un quasi-médian de x, y, z .

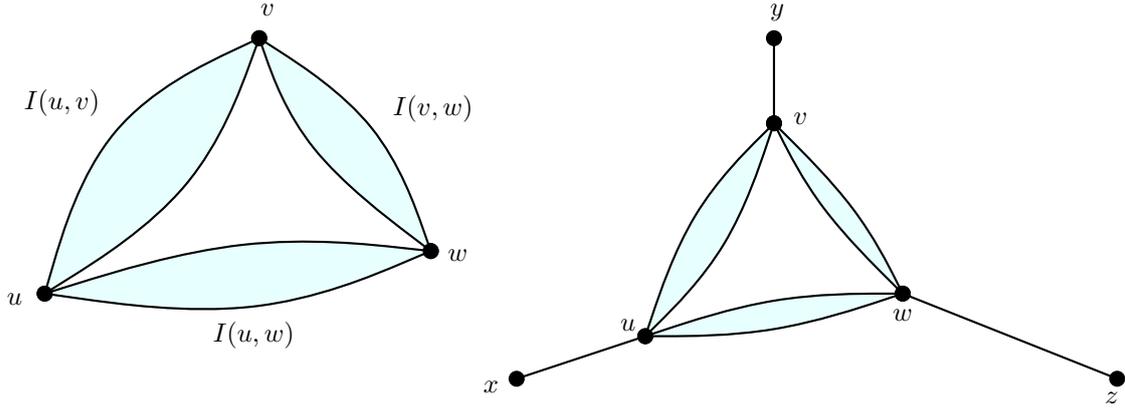


FIGURE 2 – Exemple d'un triangle métrique et d'un quasi-médian

Définition 2.1.4 (μ -borné). *Les triangles métriques d'un graphe G sont dit μ -bornés si tous les côtés de tous les triangles métriques de G sont bornés par μ*

Définition 2.1.5 (ν -fin). *Les intervalles d'un graphe G sont dit ν -fins si pour tout intervalle $I(u, v)$, et pour toute paire de sommets $x, y \in I(u, v)$ situés à même distance de u , x et y sont à distance au plus ν dans G .*

Proposition 2.1. [5] *Soit G un graphe. Si les intervalles de G sont μ -fins, et les triangles métriques bornés par ν , alors G est $(16\mu + 4\nu)$ -hyperbolique.*

Remarque. La réciproque de cette proposition est fautive. En effet, il existe des familles de graphes dont l'hyperbolicité est bornée qui contiennent des triangles métriques de taille arbitraire (voir Figure 3).

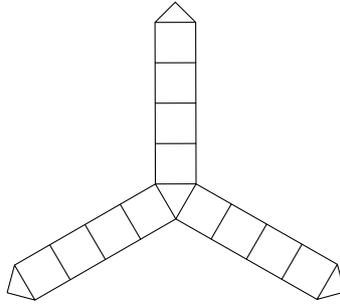


FIGURE 3 – Exemple d'un triangle métrique de taille arbitraire (en augmentant le nombre de carré) dans un graphe 2-hyperbolique

2.2 Graphes faiblement modulaires

Définition 2.2.1 (Graphe faiblement modulaire). *Un graphe G est faiblement modulaire s'il vérifie les deux conditions suivantes (voir Figure 4) :*

- (condition du triangle) *Pour tout triplet de sommets u, v, w tel que $d(v, w) = 1$ et $d(u, v) = d(u, w) > 1$, il existe un voisin commun x de v et w tel que $d(u, x) = d(u, v) - 1$.*

- (condition du quadrangle) Pour tout quadruplet de sommets u, v, w, z tel que $d(v, z) = d(w, z) = 1 < d(v, w)$ et $d(u, v) = d(u, w) = d(u, z) - 1$, il existe un voisin commun x de v et w tel que $d(u, x) = d(u, v) - 1$.

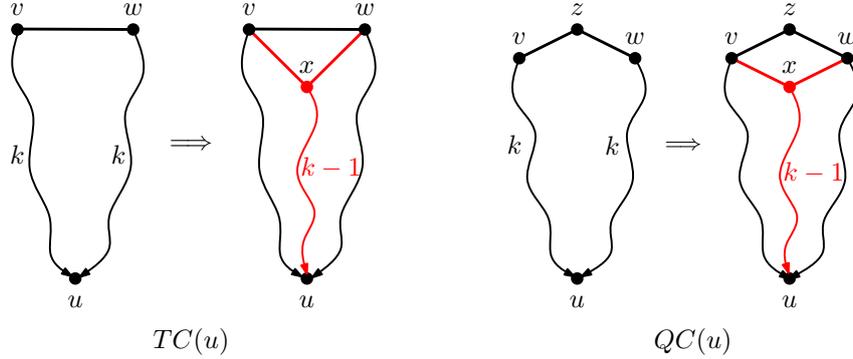


FIGURE 4 – Conditions du triangle et du quadrangle

Proposition 2.2. [2] Soit G un graphe faiblement modulaire et (u, v, w) un triangle métrique de G . Alors tous les sommets de $I(v, w)$ sont à la même distance $k = d(u, v)$ de u .

Remarque. Cette propriété est en fait équivalente aux conditions du triangle et du quadrangle [2]. On remarquera notamment que cela implique que tous les triangles métriques sont équilatéraux.

2.3 Graphes de Helly

Les graphes de Helly sont les graphes possédant la propriété suivante :

Définition 2.3.1 (Propriété de Helly). Un graphe G a la propriété de Helly si pour toute famille \mathcal{B} de boules de G telle que l'intersection deux à deux des boules de \mathcal{B} est non vide, alors l'intersection de toutes les boules est non vide.

Les graphes de Helly sont une sous-classe des graphes faiblement modulaires :

Proposition 2.3. Soit G un graphe de Helly. Alors G est faiblement modulaire.

Démonstration. Il suffit de montrer que G vérifie les conditions du triangle et du quadrangle. Soit $u, v, w \in G$ tels que $d(v, w) = 1$ et $k = d(u, v) = d(u, w) > 1$. On considère les trois boules $B_1 = N_1(v)$, $B_2 = N_1(w)$, $B_3 = N_{k-1}(u)$. Il est évident que les boules B_1 et B_2 s'intersectent car v et w sont adjacents. Maintenant, comme v (resp. w) est à distance k de u , si on prend une géodésique quelconque (v, u) (resp. (w, u)) et qu'on considère x le premier sommet après v (resp. w) sur cette géodésique, on a $x \in N_1(v)$ et $x \in N_{k-1}(u)$, soit $x \in B_1 \cap B_3$ (resp. $x \in B_2 \cap B_3$). Les intersections deux à deux sont non vides, la propriété de Helly nous dit qu'il existe un sommet x appartenant aux trois boules. Mais alors x est un voisin commun de v et w , et $d(u, x) = k - 1$, la condition du triangle est vérifiée.

Pour la condition du quadrangle, les boules considérées sont les mêmes. La seule différence est que $B_1 \cap B_2$ est non-vide parce que z est un voisin commun de v et w . La condition du quadrangle est donc vérifiée, et donc G est faiblement modulaire. \square

Cette propriété forte permet de borner les triangles métriques :

Proposition 2.4. *Les triangles métriques d'un graphe G de Helly sont 1-bornés.*

Démonstration. Soit G un graphe de Helly, et soit (u, v, w) un triangle métrique du graphe G de côté k (équilatéral car G est de Helly, donc faiblement modulaire). Supposons que $k > 1$. Considérons $B_1 = N_1(u)$, $B_2 = N_{k-1}(v)$ et $B_3 = N_{k-1}(w)$. Alors B_1 s'intersecte avec B_2 et B_3 car $d(u, v) = d(u, w) = k$. De plus, $d(v, w) = k$ implique que B_2 et B_3 s'intersectent (du moment que $2(k-1) \geq k$, soit $k \geq 2$, ce qui est vrai par hypothèse). Donc, comme G est de Helly, il existe un point x appartenant à l'intersection $B_1 \cap B_2 \cap B_3$. Mais alors, ce point est sur une géodésique de u à v (car $d(u, x) = 1$, $d(x, v) = k-1$, et $d(u, v) = k$) et sur une géodésique de u à w (idem), i.e. $x \in I(u, v) \cap I(u, w)$, le triangle n'est donc pas métrique. On aboutit à une contradiction, donc $k = 1$ et les triangles métriques de G sont 1-bornés. \square

2.4 Graphes bridged

Les graphes bridged généralisent la notion de graphes triangulés :

Définition 2.4.1. *Soit G un graphe. Un bridge d'un cycle C est une géodésique de G qui relie deux sommets u, v non-consécutifs de C , qui est plus courte que les deux chemins qui relient u et v dans C . G est un graphe bridged si chaque cycle de longueur supérieure à 4 possède un bridge (i.e. les seuls cycles isométriques sont de longueur 3).*

Là aussi, les graphes bridged sont une sous-classe des graphes faiblement modulaire :

Proposition 2.5. [4] *Les propriétés suivantes pour un graphe G sont équivalentes :*

- a) G est bridged
- b) G est faiblement modulaire et ne contient ni 4-cycle induit, ni 5-cycle induit.

Remarque. Les graphes triangulés sont des graphes bridged, et donc des graphes faiblement modulaires.

2.5 Graphes médians

Définition 2.5.1 (Graphe médian). *Un graphe G est dit médian si pour tout triplet u, v, w de sommets, l'intersection $I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)$ est un singleton, le médian $m(u, v, w)$.*

Les graphes médians sont fortement reliés aux hypercubes puisqu'ils sont des sous-graphes isométriques d'hypercubes. La forte structure des graphes médians permet là aussi de borner les triangles métriques :

Proposition 2.6. *Soit G un graphe médian. Alors les triangles métriques de G sont réduits à un point.*

Démonstration. Soit G un graphe médian. Supposons qu'il existe un triangle métrique (u, v, w) , avec u, v, w disjoints. Alors, comme G est médian, il existe x le médian du triplet u, v, w qui appartient à l'intersection $I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)$, ce qui contredit immédiatement le fait que (u, v, w) soit métrique. Les triangles métriques de G sont restreints à un point. \square

Remarque. Cette propriété est aussi valable pour les graphes modulaires, qui vérifient $I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u) \neq \emptyset$ (pas unicité du médian).

2.6 Graphes aux boules convexes

Les graphes aux boules convexes forment une sur-classe des graphes bridged que nous avons étudiés pour établir un résultat annexe section 5.

Définition 2.6.1 (Boule convexe). *Dans un graphe G , une boule B correspond à un s -voisinage d'un sommet u . On dit que B est convexe si pour tout deux points $x, y \in B$, on a tout l'intervalle $I(x, y)$ dans B . On dira que le graphe G a des boules convexes si toutes ses boules sont convexes.*

La convexité des boules implique notamment ce résultat, que nous utiliserons plus tard :

Proposition 2.7. *Soit G un graphe aux boules convexes, et u, v deux sommets de G . Soit C l'ensemble des voisins de u appartenant à l'intervalle $I(u, v)$. Alors C forme une clique.*

Démonstration. Soit G un graphe aux boules convexes, u, v deux sommets de G , et posons $k = d(u, v)$. Soient C l'ensemble des voisins de u appartenant à l'intervalle $I(u, v)$, et x, y deux sommets de C quelconques. Alors, comme x, y appartiennent à la boule $N_{k-1}(v)$, qui est convexe, on a $I(x, y) \subseteq N_{k-1}(v)$. Mais si x et y étaient à distance deux, alors on aurait $u \in N_{k-1}(v)$ (puisque u serait sur une géodésique de x à y), ce qui contredit $d(u, v) = k$. Ainsi, on a forcément $d(x, y) = 1$, i.e. x, y sont adjacents. Comme ce raisonnement est valable pour deux sommets quelconques de C , on obtient finalement que C est une clique. \square

Remarque. Cette propriété implique notamment la non-existence de 4-cycle induit dans le graphe G . En effet, supposons qu'il existe un 4-cycle induit u, v, x, y . Alors, comme v, y sont des voisins de u et appartiennent à l'intervalle $I(u, x)$, ils sont adjacents d'après la propriété précédente. C'est une contradiction avec le fait que le cycle soit induit, donc il n'y a pas de tel cycle dans un graphe aux boules convexes, i.e. chaque carré possède une diagonale.

On peut montrer de même que les seuls cycles isométriques possibles sont de taille 3 et 5.

Montrons une propriété qu'on utilisera par la suite pour démontrer le résultat :

Proposition 2.8. *Soit G un graphe aux boules convexes, et (u, v, w) un triangle métrique de côtés $1, k, k$. Alors $k = 1$ ou $k = 2$.*

Démonstration. Soit (u, v, w) un triangle métrique de G de côtés $1, k, k$, et supposons $k > 2$. Soit x un sommet voisin de v sur une géodésique (v, w) . Alors, comme la boule $N_{k-1}(w)$ est convexe, et que v n'appartient pas à cette boule, les sommets à distance 2 de v dans l'intervalle $I(v, w)$ sont à distance au plus 2 de x . Le cas adjacent amène une contradiction immédiate avec le fait que (u, v, w) soit métrique, car x appartiendrait à une géodésique (v, w) et une géodésique (v, u) . Ils sont donc nécessairement à distance

2, ce qui implique $d(x, u) = k$, et posons y un sommet à distance 1 de u appartenant à l'intersection $I(v, u) \cap I(x, u)$. Maintenant, comme la boule $N_{k-1}(x)$ est convexe et contient y et w , soit y et w sont adjacents, soit ils sont à distance 2 et donc $u \in N_{k-1}(x)$. Dans les deux cas, on obtient des points qui sont sur une géodésique (v, w) et (v, u) à la fois. Contradiction, donc un triangle métrique de côtés $1, k, k$ vérifie forcément $k \leq 2$. \square

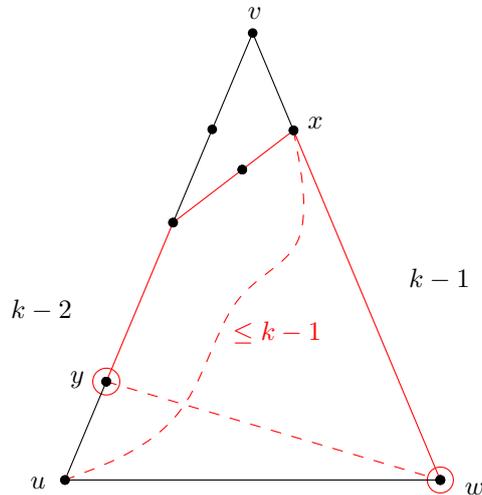


FIGURE 5 – Illustration de la preuve

3 Preuve du résultat

3.1 Une propriété métrique des graphes de $CWFR(s, s - 1)$

La caractérisation connue pour les graphes $CWFR(s, s - 1)$, l'ordre de démontage, ne nous a pas permis de montrer des résultats sur l'hyperbolicité, car l'ordre est difficile à utiliser. Il a donc d'abord fallu établir des propriétés d'ordre métrique liées à l'appartenance à $CWFR(s, s - 1)$

Définition 3.1.1 (Localement s -isométrique). *Soit G un graphe, et H un sous-graphe de G . On dit que H est localement s -isométrique s'il existe un ensemble \mathcal{P} de géodésiques de G , qui sont des chemins de H , vérifiant : pour tout sommet u de H , il existe une géodésique $P \in \mathcal{P}$ telle que $u \in P$ et u est à distance au moins s des deux extrémités de P .*

Proposition 3.1. *Soit G un graphe, et H un sous-graphe de G . Si H est localement s -isométrique, alors $G \notin CWFR(s, s - 1)$.*

Démonstration. Supposons que $G \in CWFR(s, s - 1)$. Alors il existe un ordre (u_1, u_2, \dots, u_n) de démontage de G . Soit u le premier sommet de H , éliminé par u^+ , dans cet ordre. D'après l'hypothèse, on a une géodésique P_0 telle que $u \in P_0$ et u est à distance au moins s des deux extrémités de P_0 . On prend alors x le sommet à distance s de u sur P_0 vers une extrémité, et y le sommet à distance s de u sur P_0 vers l'autre extrémité. Ainsi, comme $x, y \in P_0$, le chemin (x, y) dans le sous-graphe H est une géodésique de G et donc

$d(x, y) = d(x, u) + d(u, y) = 2s$. D'autre part, comme $x, y \in B_s(u) \cap X_u$ (car u est le premier éliminé), on a $x, y \in B_{s-1}(u^+)$. Ainsi, le chemin $(x, u^+) \cup (u^+, y)$ nous donne, d'après l'inégalité triangulaire, $d(x, y) \leq 2(s-1)$. On aboutit à une contradiction, donc $G \notin CWFR(s, s-1)$. \square

Cette propriété nous permet d'établir en corollaire deux schémas incompatibles avec la classe $CWFR(s, s-1)$

Corollaire 3.2. *Soit G un graphe, et C un cycle induit. Supposons qu'il existe un ensemble $\mathcal{P} = \{P_i | 1 \leq i \leq n\}$ de géodésiques de G tel que :*

- (i) *Les géodésiques de \mathcal{P} sont des chemins de C*
- (ii) *Chaque arête de C appartient à au moins une géodésique P de \mathcal{P}*
- (iii) *$P_i \cap P_j = \emptyset$ si i, j ne sont pas consécutifs (modulo n), et $|P_i \cap P_{i+1}| \geq 2s$ sinon (de même avec $P_n \cap P_1$).*

Alors $G \notin CWFR(s, s-1)$.

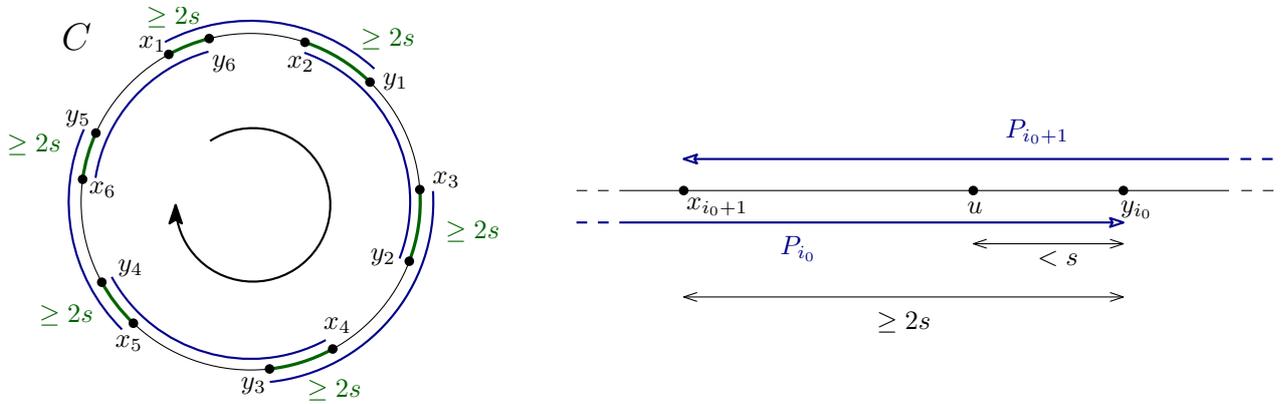


FIGURE 6 – Illustration de la preuve du corollaire 3.2

Démonstration. On peut identifier une géodésique P_i par ses extrémités (x_i, y_i) . On prendra la convention que, à partir de x_0 et en parcourant le cycle dans le sens horaire, on rencontre x_i avant y_i . Tout d'abord, remarquons que si on prend P_i et P_{i+1} , on a $P_i \cap P_{i+1} = (x_{i+1}, y_i)$. La condition (iii) nous dit que $d(x_{i+1}, y_i) \geq 2s$. De même, $P_{i+1} \cap P_{i+2} = (x_{i+2}, y_{i+1})$, avec $d(x_{i+2}, y_{i+1}) \geq 2s$. Alors la condition (iii) nous dit qu'on a nécessairement $d(y_i, x_{i+2}) \geq 1$ (sinon $P_i \cap P_{i+2} \neq \emptyset$). On a donc nécessairement $d(y_i, y_{i+1}) = d(y_i, x_{i+2}) + d(x_{i+2}, y_{i+1}) > 2s$.

Soit u un sommet quelconque du cycle. Comme \mathcal{P} couvre C , il existe au moins une géodésique qui recouvre u . Prenons la géodésique P_{i_0} qui maximise la distance minimale de u à ses extrémités. Supposons que u soit à distance $< s$ de l'extrémité droite y_{i_0} de P_{i_0} (l'autre cas est symétrique). Alors, la condition (iii) nous dit que l'extrémité gauche x_{i_0+1} de P_{i_0+1} vérifie $d(x_{i_0+1}, y_{i_0}) \geq 2s$. Mais comme u est à distance $< s$ de y_{i_0} , on a $u \in P_{i_0+1}$ et $d(u, x_{i_0+1}) \geq s$, et comme l'autre extrémité y_{i_0+1} de P_{i_0+1} est à au moins $2s$ de y_{i_0} (d'après le petit résultat établi au début de la preuve) et donc de u , on a trouvé une géodésique pour laquelle la distance minimale de u à ses extrémités est plus grande.

On obtient une contradiction, donc la géodésique P_{i_0} vérifie que u est à distance $\geq s$ des deux extrémités. Ainsi, le cycle est localement s -isométrique. \square

Corollaire 3.3. *Soit G un graphe tel qu'il existe une grille isométrique carrée de taille $2s$. Alors $G \notin CWFR(s, s - 1)$.*

Démonstration. Considérons u, v, w, x les quatre coins de la grille dans le sens horaire. Posons P_0 la géodésique (u, w) passant par v , P_1 la géodésique (v, x) passant par w , P_2 la géodésique (w, u) passant par x , P_3 la géodésique (x, v) passant par u . Alors ces 4 géodésiques couvrent le contour de la grille, et leurs intersections sont de taille $\geq 2s$ (si non vide). D'après le corollaire précédent, $G \notin CWFR(s, s - 1)$. \square

3.2 Un résultat plus général pour l'hyperbolicité

La propriété que nous venons d'établir nous permet de relier les triangles métriques des graphes $CWFR(s, s - 1)$ à la δ -hyperbolicité :

Théorème 3.4. *Soit $G \in CWFR(s, s - 1)$ tel que ses triangles métriques soient μ -bornés. Alors G est $(16s + 24\mu)$ -hyperbolique.*

De plus, si G est faiblement modulaire, alors G est $(16s + 10\mu)$ -hyperbolique.

Le point clé de la démonstration du théorème est le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit $G \in CWFR(s, s - 1)$ tel que ses triangles métriques soient μ -bornés. Alors ses intervalles sont $(4s + 2\mu)$ -fins. De plus, si G est faiblement modulaire, alors ses intervalles sont $(4s + \mu)$ -fins.*

Démonstration. On considère l'intervalle $I(u, v)$. Soit x, y deux points dans l'intervalle à même distance k de u , et donc même distance l de v . On prend la quasi-médiane (u', u_1, u_2) de u, x, y , et on pose $k_1 = d(u', u_1), k_2 = d(u', u_2), k_3 = d(u_1, u_2), a_1 = k - d(u, u') - k_1, a_2 = k - d(u, u') - k_2$. On fait la même chose symétriquement pour v pour définir l_1, l_2, b_1, b_2 (voir Figure ??).

Supposons que a_1, a_2, b_1, b_2 soient plus grand que $2s$. On pose C le cycle défini par les plus courts chemins pour aller de x à v_1 , de v_1 à v_2 , de v_2 à y , de y à u_2 , de u_2 à u_1 . Alors on pose P_0 une géodésique de u_1 à v_1 passant par x , P_1 une géodésique de x à y passant par v_1 et v_2 , P_2 une géodésique de v_2 à u_2 passant par y , P_3 une géodésique de y à x passant par u_2 et u_1 . Par construction des quasi-médians, on a bien que P_i est un chemin de C . De plus, l'hypothèse $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 2s$ nous donne que $|P_i \cap P_{i+1}| \geq 2s$. Et on a bien le fait que chaque arête de C appartient à au moins une géodésique. On peut appliquer le corollaire 3.2 qui nous dit qu'un tel schéma implique que $G \notin CWFR(s, s - 1)$. On aboutit à une contradiction, donc nécessairement un des a_1, a_2, b_1, b_2 est plus petit que $2s$. Supposons que ce soit a_1 (les autres cas sont symétriques).

Alors, comme $k_1 + a_1 = k_2 + a_2$, et que $k_1, k_2 \leq \mu$, on a $a_2 \leq a_1 + \mu \leq 2s + \mu$. D'où, comme u_1, u_2 sont sur une géodésique de x à y , $d(x, y) = d(x, u_1) + d(u_1, u_2) + d(u_2, y) = a_1 + k_3 + a_2$. On obtient donc finalement $d(x, y) \leq 4s + 2\mu$, les intervalles de G sont $(4s + 2\mu)$ -fins.

Dans le cas où G est faiblement modulaire, on a directement $a_1 = a_2$ puisque les triangles métriques sont équilatéraux. On obtient donc $d(x, y) \leq 4s + \mu$: les intervalles de G sont $(4s + \mu)$ -fins. \square

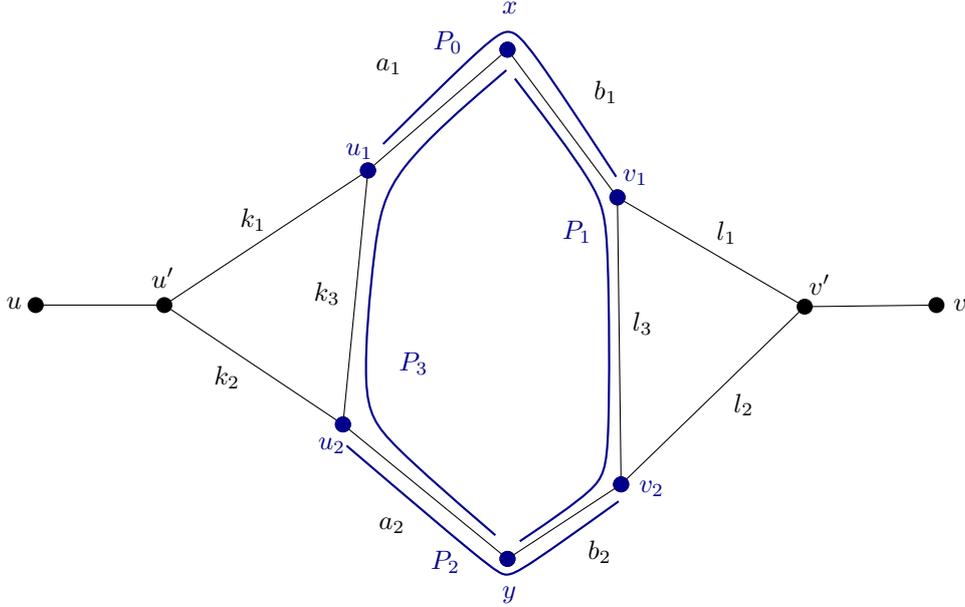


FIGURE 7 – Illustration de la preuve du lemme 3.5

Preuve du théorème Le théorème 3.4 est une conséquence directe de la proposition 2.1. En effet, étant donné que les triangles de G sont μ -bornés, et que les intervalles sont donc $(4s + 2\mu)$ -fins d'après le lemme précédent, la proposition nous donne : le graphe G est $(16\mu + 4(4s + 2\mu))$ -hyperbolique, soit $(16s + 24\mu)$ -hyperbolique. Dans le cas où G est faiblement modulaire, la remarque donne G $(16s + 10\mu)$ -hyperbolique.

Corollaire 3.6. *Soit $G \in CWFR(s, s - 1)$ un graphe de Helly. Alors G est $(16s + 10)$ -hyperbolique.*

Démonstration. On a montré que les triangles métriques des graphes de Helly sont 1-bornés (proposition 2.4). D'après le théorème précédent, comme les graphes de Helly sont faiblement modulaires, les graphes de Helly qui appartiennent à $CWFR(s, s - 1)$ sont donc $(16s + 10)$ -hyperboliques. \square

On pourrait être tenté d'utiliser le théorème précédent sur les graphes médians, puisque les triangles métriques des graphes médians sont réduits à un point, donc de taille nulle. Le théorème précédent nous donnerait $\delta = 16s$ mais ce résultat n'est pas optimal. En effet, on peut utiliser la structure des graphes médians, qui est fortement liée aux cubes et donc aux grilles, pour établir une meilleure borne grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.7. [5] *Soit G un graphe médian ne contenant pas de grille isométrique carré de taille δ . Alors G est δ -hyperbolique.*

Corollaire 3.8. *Soit $G \in CWFR(s, s - 1)$ un graphe médian. Alors G est $2s$ -hyperbolique.*

Démonstration. Le résultat découle du corollaire 3.3 qui montre que le fait que G soit $CWFR(s, s - 1)$ n'est pas compatible avec l'existence de grille isométrique carré de taille $2s$. Grâce à cette dernière proposition, on obtient donc que G est $2s$ -hyperbolique. \square

3.3 Triangles métriques des graphes $CWFR(s, s - 1)$ faiblement modulaires

Pour obtenir le résultat principal (Théorème 1.5), il nous suffit donc de borner les triangles métriques des graphes $CWFR(s, s - 1)$ faiblement modulaires. Pour ce faire, nous allons encore utiliser des schémas qu'interdit la classe $CWFR(s, s - 1)$.

Lemme 3.9. *Soit G un graphe faiblement modulaire, et (u, v, w) un triangle métrique de G . Alors, pour tout point x sur une géodésique de u à w à distance p de u , il existe un point y sur une géodésique de u à v à distance p de u et de x .*

Démonstration. Soit G faiblement modulaire, (u, v, w) un triangle métrique de côté k . Soit x un point sur une géodésique (u, w) tel que $d(u, x) = p$. Prenons un quasi-médian (u, v', x') du triplet u, v, x . Alors, comme G est faiblement modulaire, le triangle métrique (u, v', x') est équilatéral, de côté k' . Maintenant, comme G est faiblement modulaire, que (u, v, w) est un triangle métrique de G , et que $x \in I(u, w)$, alors $d(v, x) = d(v, u) = k$. Par construction, le chemin $(v, v') \cup (v', x') \cup (x', x)$ est une géodésique et donc $k = d(v, x) = d(v, v') + d(v', x') + d(x', x)$. Maintenant, comme $v' \in I(u, v)$, on a $d(v, v') + k' = k$. D'où finalement $k = k + d(x, x')$, et donc $d(x, x') = 0$, i.e. x et x' sont confondus. On prend alors $y = v'$ et comme le triangle (u, x, y) est métrique et donc équilatéral, on a bien y à distance p de u et de x . \square

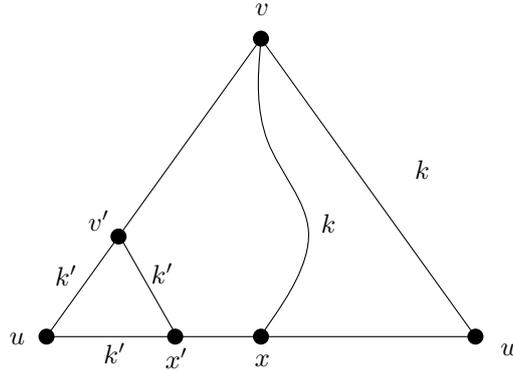


FIGURE 8 – Illustration de la preuve du lemme 3.9

Théorème 3.10. *Soit $G \in CWFR(s, s - 1)$ faiblement modulaire. Alors ses triangles métriques sont $6s$ -bornés.*

Démonstration. Soit $G \in CWFR(s, s - 1)$ faiblement modulaire. Supposons qu'il existe un triangle métrique (u, v, w) de G de côté $\geq 6s$. On prend x_u un point à distance $2s$ de u sur une géodésique (u, w) , y_u un point à distance $2s$ de u et de x_u sur une géodésique (u, v) grâce au lemme précédent, x_v un point à distance $2s$ de v sur une géodésique (u, v) passant par y_u , y_v un point à distance $2s$ de v et de x_v sur une géodésique (v, w) grâce au lemme précédent. On prend finalement un quasi-médian (x_w, y_w, x) , de côté k , du triplet y_v, x_u, w , et on différencie deux cas suivant la valeur de k .

Si $k > 2s$ (cf Figure 9 gauche), on peut prendre x'_w un sommet à distance $2s$ sur une géodésique (w, x_w) et un point y'_w un point à distance $2s$ de w et de x'_w sur une géodésique

(w, y_w) (grâce au lemme précédent). On pose P_1 la géodésique de x_u à x_v passant par y_u , P_2 la géodésique de y_u à y_v passant par x_v , P_3 la géodésique de x_v à x'_w passant par y_v , P_4 la géodésique de y_v à y'_w passant par x'_w , P_5 la géodésique de x'_w à x_u passant par y'_w , P_6 la géodésique de y'_w à y_u passant par x_u . Alors, le cycle C défini par les plus court chemin de x_u à y_u , de y_u à x_v , de x_v à y_v , de y_v à x'_w , de x'_w à y'_w , de y'_w à x_u , est couvert par cet ensemble de géodésique. De plus, les intersections de ces géodésiques sont de taille $\geq 2s$ (car le côté du triangle est $\geq 6s$). Par le lemme 3.2, on obtient $G \notin CWFR(s, s - 1)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Si $k \leq 2s$ (cf Figure 9 droite), on pose P_1 la géodésique de x_u à x_v passant par y_u , P_2 la géodésique de y_u à y_v passant par x_v , P_3 la géodésique de x_v à x_w passant par y_v , P_4 la géodésique de y_v à x_u passant par x_w et y_w (par construction du quasi-médian), P_5 la géodésique de y_w à y_u passant par x_u . Par le lemme 3.2, on obtient de même $G \notin CWFR(s, s - 1)$, là aussi une contradiction.

Dans les deux cas on aboutit à une contradiction, donc l'existence d'un tel triangle n'est pas possible. Tous les triangles métriques de G sont de côté inférieur à $6s$. \square

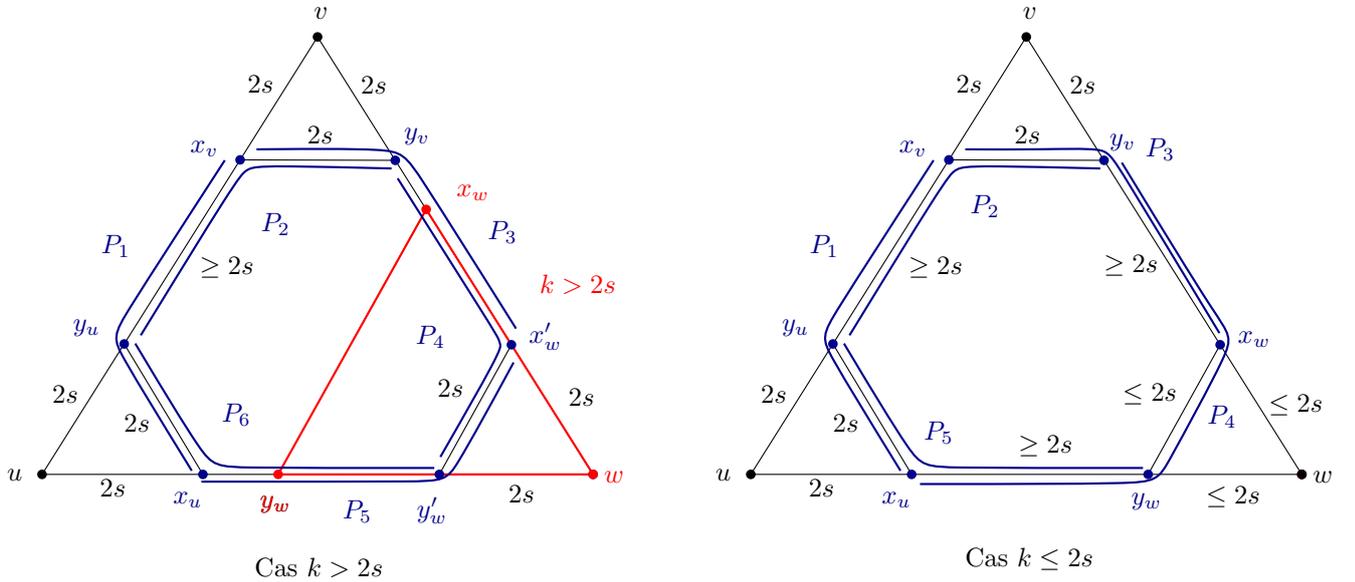


FIGURE 9 – Illustration de la preuve du théorème 3.10

3.4 Preuve du théorème

Finalement, en utilisant le théorème précédent, on en déduit que les triangles métriques d'un graphe $G \in CWFR(s, s - 1)$ faiblement modulaire sont $6s$ -bornés. D'où, en utilisant le théorème 3.4 dans le cas où G est faiblement modulaire, on a finalement que G est $(16s + 20(6s))$ -hyperbolique, soit $136s$ -hyperbolique.

4 Autres approches

Durant le stage, nous avons essayé d'autres techniques pour résoudre cette question ouverte dans le cas général, ou dans certaines autres classes de graphes.

4.1 Induction

La première méthode à laquelle on pense est l'induction sur l'ordre de démontage. Cependant, si on veut une hyperbolicité en $\delta(s)$ qui ne dépend que de s , il faut que l'ajout d'un sommet ne modifie pas le δ , sinon on obtient une dépendance en n due à l'induction. Il faut aussi faire très attention à quelle définition de l'hyperbolicité on utilise puisqu'elle diffère d'un facteur multiplicatif. Donc si en supposant le graphe $G \setminus \{v\}$ δ -hyperbolique avec une définition, on arrive à prouver que G est δ -hyperbolique avec une deuxième définition, mais que le facteur multiplicatif est 2, on se retrouve avec un 2^n au bout de l'induction.

Prenons un quadruplet u, v, x, y de G , sous l'hypothèse que G est $CWFR(s, s - 1)$ avec u est le premier sommet dans l'ordre de démontage et $G \setminus \{u\}$ est δ -hyperbolique. On veut borner le plus petit côté du rectangle (du plongement dans le plan euclidien). Puisqu'il faut se servir du fait que G soit $CWFR(s, s - 1)$, il faut faire intervenir u^+ , le sommet qui domine u . Il faut donc considérer l'enveloppe injective à 5 points (plongement dans l'espace), ce qui est nettement plus délicat, car il y a plusieurs cas à considérer. Dans chaque cas, il y a encore des sous-cas et certains ne nous ont pas permis de conclure.

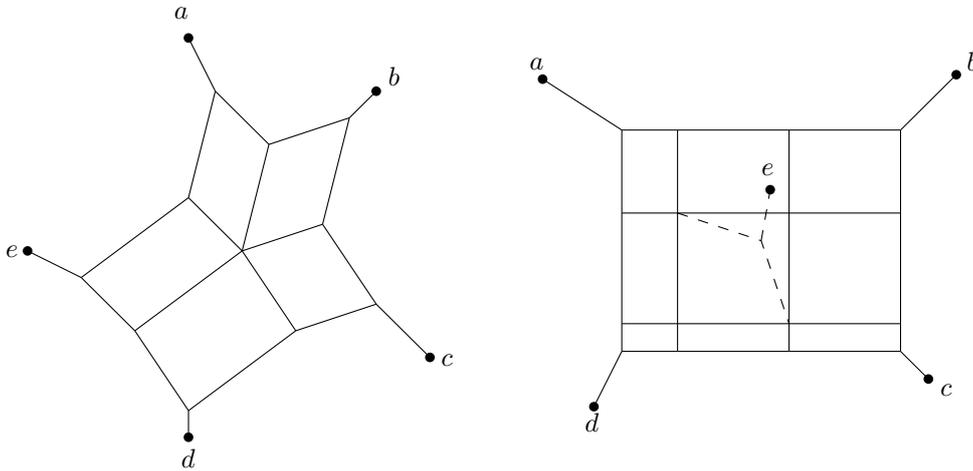


FIGURE 10 – 2 des 3 cas possibles pour l'enveloppe injective à 5 points

4.2 Boules convexes

Pour essayer d'élargir le résultat, nous avons repris les preuves du résultat sur les graphes de Helly et sur les graphes bridged pour voir quelles hypothèses étaient vraiment utilisées dans la preuve. Nous avons alors essayé d'affaiblir les hypothèses mais nous ne sommes pas parvenus à mener la preuve jusqu'au bout. Pour mieux comprendre notre démarche, rappelons quelques étapes de la preuve dans le cas des graphes de Helly et des graphes bridged.

Définition 4.2.1 ($((s, s')^*$ -démontable). *Un graphe G est dit $((s, s')^*$ -démontable si on peut ordonner les sommets v_1, v_2, \dots, v_n de G de telle sorte que pour tout $i < n$, il existe j tel que : v_i et v_j sont voisins, et $N_s(v_i, G \setminus \{v_j\}) \cap X_i \subseteq N_{s'}(v_j, G)$ (on a plus forcément $j < i$).*

Proposition 4.1. [3] Soit G un graphe $(s, s-1)^*$ -démontable, alors G est s^2 -hyperbolique.

Proposition 4.2. [3] Soit $G \in CWFR(s, s-1)$ un graphe de Helly ou un graphe bridged. Alors G est $(s, s-1)^*$ -démontable, et donc G est s^2 -hyperbolique.

L'idée de la preuve est de partir de l'ordre donné par le fait que $G \in CWFR(s, s')$, et de montrer qu'on peut toujours dominer un sommet par un sommet plus proche de lui si la distance est plus grande que 1. Avec la propriété des boules convexes, nous avons réussi à ramener le sommet qui domine seulement à distance 2, ce qui ne permet pas de conclure avec l'hyperbolicité.

Définition 4.2.2 ($(s, s')^{**}$ -démontable). Un graphe G est dit $(s, s')^{**}$ -démontable si on peut ordonner les sommets v_1, v_2, \dots, v_n de G de telle sorte que pour tout $i < n$, il existe j tel que : v_i et v_j sont à distance au plus 2, et $N_s(v_i, G \setminus \{v_j\}) \cap X_i \subseteq N_{s'}(v_j, G)$ (on a plus forcément $j < i$).

Proposition 4.3. Soit $G \in CWFR(s, s-1)$ un graphe aux boules convexes. Alors G est $(s, s-1)^{**}$ -démontable.

Démonstration. Soit G un graphe aux boules convexes qui est $(s, s-1)$ -démontable. Soit v_i le $i^{\text{ème}}$ sommet dans l'ordre de démontage, et y_i le sommet qui domine v_i . Supposons que $k = d(v_i, y_i) > 2$. La convexité de la boule $N_{k-1}(v_i)$ implique que l'ensemble C de tous les voisins de y_i dans l'intervalle $I(y_i, v_i)$ forment une clique. Nous allons montrer que nous pouvons trouver un sommet y'_i de C qui domine v_i et qui est à distance $k-1$ de v_i . En répétant le même raisonnement avec y'_i au lieu de y_i , on obtiendra finalement un sommet dans l'intervalle $I(v_i, y_i)$ qui est à distance au plus 2 de v_i , et qui domine aussi v_i .

Soit $A = (X_i \cap N_s(v_i)) \setminus \{v_i, y_i\}$, et x un sommet quelconque de A . On a donc par construction $d(x, y_i) \leq s-1$ et $d(x, v_i) \leq s$. Supposons $d(x, v_i) \leq s-1$, alors comme y_i, v_i appartiennent à la boule $N_{s-1}(x)$, qui est convexe, on a $I(y_i, v_i) \subseteq N_{s-1}(x)$, donc tous les voisins de y_i dans l'intervalle $I(y_i, v_i)$ sont à distance au plus $s-1$ de x . Même chose si $d(x, y_i) < s-1$. Le choix du sommet y'_i ne dépend donc que de l'ensemble $A_0 = \{x \in A : d(x, v_i) = s \text{ and } d(x, y_i) = s-1\}$.

Soit x un sommet quelconque appartenant à A_0 . Soit v_0 un sommet à distance 1 de v_i sur une géodésique (v_i, x) . Alors, comme v_i et v_0 sont adjacents et $d(y_i, v_i) = k$, on a nécessairement $k-1 \leq d(y_i, v_0) \leq k+1$. Si $d(y_i, v_0) = k+1$, alors v_i est sur une géodésique de v_0 à y_i et donc $I(v_i, y_i) \subset I(v_0, y_i)$, i.e. tout sommet $y \in C$ appartient à $N_{s-1}(x)$, ce n'est donc pas un cas problématique. Si $d(y_i, v_0) = k$, alors d'après le lemme 2.8, le triangle (v_0, y_i, v_i) , de côtés $1, k, k$, ne peut pas être métrique, et donc il existe $y'_i \in I(y_i, v_0) \cap I(y_i, v_i)$ voisin de y_i . Et comme y'_i appartient à l'intervalle $I(y_i, v_0)$, et que $y_i, v_0 \in N_{s-1}(x)$, qui est convexe, alors $y'_i \in N_{s-1}(x)$, i.e. $d(x, y'_i) \leq s-1$. Si $d(y_i, v_0) = k-1$, alors v_0 est sur une géodésique (v_i, y_i) , on obtient par le même raisonnement un sommet $y'_i \in I(y_i, v_i) \cap I(y_i, v_0)$, et donc $d(x, y'_i) \leq s-1$. Dans tous les cas, on montre que $C \cap N_{s-1}(x) \neq \emptyset$.

Considérons donc maintenant le sommet y dans C qui appartient au plus de boules $N_{s-1}(x)$, où $x \in A_0$. Supposons qu'il existe un x' dans A_0 tel que $y \notin N_{s-1}(x')$. Soit $y' \in C$ donné par la construction précédente, et on prend $x \in A_0$ tel que $y \in N_{s-1}(x)$ et $y' \notin N_{s-1}(x)$ (existe sinon y' appartiendrait à plus de boules que y). Soit v_0, v'_0 les

sommets définis comme précédemment, en les prenant, si possible, à distance $k - 1$ de y_i . Si $d(v_0, y_i) = k$, alors $d(v_0, y) = k - 1$. On ne peut pas avoir $d(v_0, y') = k - 1$, car sinon y' serait dans $I(v_0, y_i)$ et donc serait dans $B_{s-1}(x)$, contradiction. On a par conséquent $d(v_0, y') = k$ et par conséquent v_i est dans $I(v_0, y')$. Soit z un voisin de v_0 dans $I(v_0, y)$. Par convexité de $N_{k-1}(y')$, z et v_i sont adjacents. On a donc trouvé z qui est à distance $s - 1$ de x (car dans l'intervalle $I(v_0, y)$), qui est voisin de v_i et à distance $k - 1$ de y_i : contradiction avec le choix de v_0 . On a donc nécessairement $d(v_0, y_i) = d(v'_0, y_i) = k - 1$, et donc $d(v_0, y) = d(v'_0, y') = k - 2$, $d(v_0, y') = d(v'_0, y) = k - 1$.

Maintenant, soit z un voisin de y dans l'intervalle $I(v_0, y)$. Alors, comme $z, y' \in I(y, v'_0)$ et sont à distances 1 de y , alors ils sont adjacents. Du coup, on a $y' \in I(v_0, y_i)$, ce qui implique $d(x, y') = s - 1$, ce qui contredit notre hypothèse $y' \notin N_{s-1}(x)$.

Cette contradiction montre que C contient un sommet qui appartient à toutes les boules $N_{s-1}(x)$ centrées en des sommets de A_0 , ce qui établit la propriété de $(s, s - 1)^{**}$ -démontage. \square

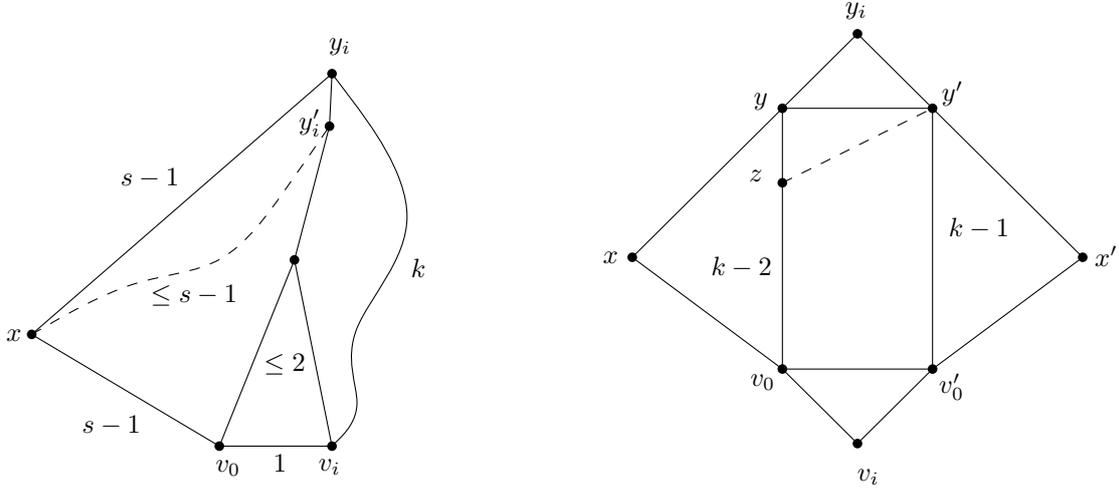


FIGURE 11 – Illustration de la preuve

4.3 $G \in CWFR(s, s - 1) \Rightarrow G \in CWFR(s + 1, s)$?

Vers le début du stage, nous avons découvert une deuxième question ouverte qui concerne l'ensemble S des entiers s pour lesquels G est dans $CWFR(s, s - 1)$:

Question ouverte : Est ce que $G \in CWFR(s, s - 1)$ implique $G \in CWFR(s + 1, s)$?

Nous pensons que là aussi la réponse est positive, i.e. S serait une demi-droite $[s_0, +\infty[$. L'intérêt de ce résultat serait d'utiliser ce s_0 qui pourrait être une valeur "critique". En effet la simulation que j'ai réalisée pendant mon stage semble indiquer que l'hyperbolicité serait liée à s_0 linéairement. Pour cette simulation, les graphes sont générés aléatoirement avec une probabilité uniforme pour chaque arête, puis le programme vérifie que S est bien une demi-droite, puis calcule l'hyperbolicité. Le nombre de sommet variait entre 10 et 100, et les probabilités d'arêtes étaient assez faible, pour obtenir des graphes avec une hyperbolicité assez grande. Comme on peut le voir Figure 12, il semble que δ soit

borné par $s_0 + 1$, dépendance linéaire donc. La simulation indique aussi que δ semble aussi borné par en dessous par $s_0 - 2$.

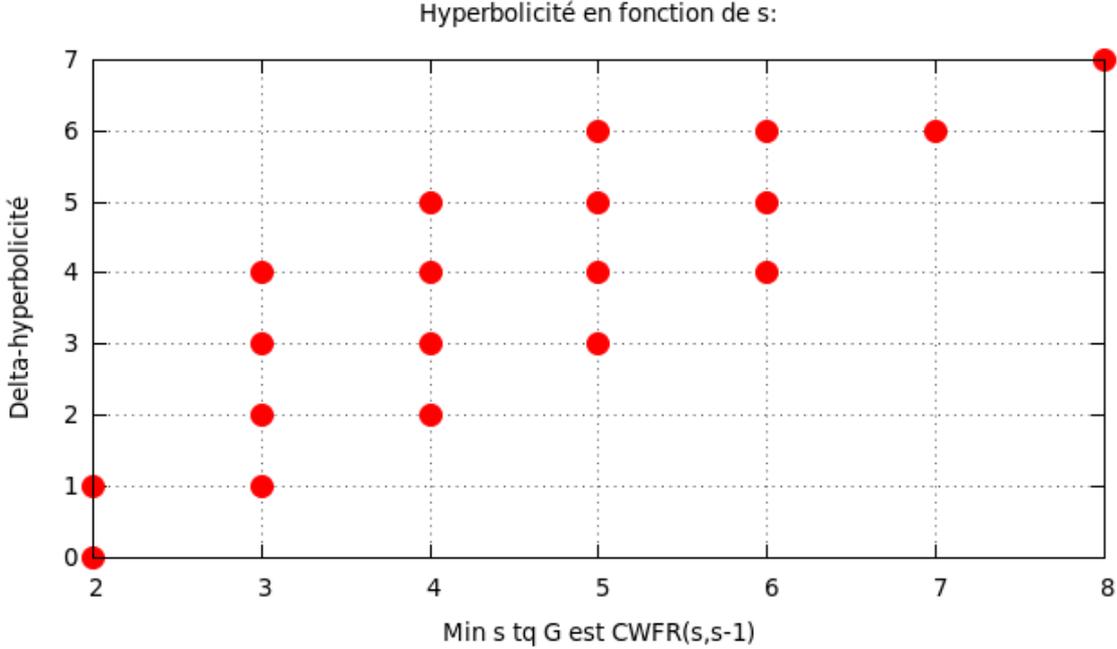


FIGURE 12 – Résultats de la simulation

Le problème majeur, qui ne nous a pas permis de conclure, est le fait que la caractérisation par l'ordre de démontage est trop légère. En effet, cette caractérisation implique l'existence d'un ordre, mais certains ordres sont plus "intelligents" que d'autres. Par exemple, si les graphes sont hyperboliques, un ordre qui semble être naturel est de commencer par les feuilles d'un BFS et de remonter jusqu'à la racine (puisque l'hyperbolicité mesure la ressemblance à un arbre). Mais dans certains cas, on peut aussi commencer par des sommets plus hauts dans l'arbre, et c'est pourquoi l'ordre dans lequel on commence par les feuilles est qualifié de plus "intelligent".

C'est pourquoi nous pensons que certains ordres de démontage "intelligents" pour $(s, s - 1)$ seraient aussi des ordres de démontage pour $(s + 1, s)$, ce qui répondrait à la question ouverte.

Nous avons quand même pu établir que S se comporte comme une demi-droite au moins à partir de $t = s_0^2 + s_0$, mais pour l'instant on ne sait pas prouver que $G \in CWFR(s, s - 1)$ pour tout $s \in [s_0, t]$.

Lemme 4.4. [3] Soit $G \in CWFR(s, s - 1)$, et α un ordre de démontage. Pour tout sommets u, v tels que $\alpha(u) < \alpha(v)$ et $d(u, v) \geq s^2$, pour tout sommet x à distance s de u sur une géodésique (u, v) , on a $\alpha(u) < \alpha(x)$.

Proposition 4.5. Soit G un graphe et s_0 le plus petit entier s tel que $G \in CWFR(s, s - 1)$. Alors, pour tout $t \geq s_0^2 + s_0$, $G \in CWFR(t, t - 1)$.

Démonstration. Soit α un ordre de démontage pour $(s_0, s_0 - 1)$, et t un entier supérieur à $s_0^2 + s_0$. Montrons que α reste un ordre de démontage pour $(t, t - 1)$, i.e. u^+ domine aussi u avec les vitesses $(t, t - 1)$. Tous les sommets à distance inférieure à s_0^2 de u sont

à distance au plus $s_0 - 1 + s_0^2$ de u^+ (en passant par u). Maintenant, soit v un sommet tel que $s_0^2 \leq d(u, v) \leq t$ et qui appartient à X_u , i.e. $\alpha(v) > \alpha(u)$. Alors, si on prend un sommet x à distance s sur une géodésique (u, v) , d'après le lemme précédent on a $\alpha(x) > \alpha(u)$, i.e. $x \in X_u$. Donc, comme $G \in CWFR(s_0, s_0 - 1)$ et que α est l'ordre de démontage qui correspond, $d(u, x) = s_0$ et $x \in X_u$ implique que $d(u^+, x) \leq s_0 - 1$. Ainsi, par inégalité triangulaire, $d(u^+, v) \leq d(u^+, x) + d(x, v) \leq s_0 - 1 + d(u, v) - s_0 \leq t - 1$. On a donc bien $N_t(u) \cap X_u \subseteq N_{t-1}(u^+)$, u^+ domine donc toujours u avec les nouvelles vitesses. G est donc $(t, t - 1)$ -démontable pour tout $t \geq s_0^2 + s_0$. \square

4.4 Espace métrique

En essayant de construire des contre-exemples, nous nous sommes rendus compte que le fait que l'espace métrique soit celui d'un graphe non-pondéré était important. En effet, si on considère le même jeu dans un espace pondéré, les deux questions ouvertes précédentes sont fausses.

Pour la question de $G \in CWFR(s, s - 1) \Rightarrow G \in CWFR(s + 1, s)$, une première réponse rapide serait de mettre des arêtes pondérées avec $s + 1$. Ainsi, le voleur a accès à de nouvelles arêtes lorsqu'on lui donne 1 point de vitesse supplémentaire, arêtes que le policier ne peut pas prendre. Il suffit par exemple de prendre un arbre suffisamment profond, et de rajouter des arêtes de poids $s + 1$ de toutes les feuilles à la racine.

On peut alors considérer le cas où le poids maximum d'une arête est s , pour éviter ce phénomène, mais la réponse reste négative. En effet si $s = 2k - 1$, on peut prendre un graphe G copwin (avec vitesse $(1, 1)$) et mettre un poids k sur chaque arête. Ainsi, le voleur et le policier ne peuvent prendre qu'une seule arête avec les vitesses $(2k - 1, 2k - 2)$, mais le voleur peut en prendre deux avec les vitesses $(2k, 2k - 1)$ tandis que le policier ne peut en prendre qu'une. Or on sait qu'il y a des graphes copwin qui n'appartiennent pas à $CWFR(2, 1)$, ce qui nous donne des graphes $G \in CWFR(s, s - 1) \setminus CWFR(s + 1, s)$.

Par le même procédé, on peut trouver des contre-exemples pour la première question. En effet, on sait que l'hyperbolicité des graphes copwin n'est pas bornée (par exemple, les graphes bridged sont cop-win, mais on peut trouver des graphes bridged avec une hyperbolicité arbitrairement grande), et on peut donc obtenir des graphes $CWFR(s, s - 1)$ en mettant un poids $s - 1$ à toutes les arêtes.

Le problème pour construire un contre exemple pour le cas initial est qu'une arête qui a un poids k ne peut pas être simplement remplacée par une suite de k arêtes de poids 1, car il faut s'assurer que les sommets intermédiaires rajoutés sont bien dominés. C'est cette propriété qui pourrait donc être exploitée pour répondre à la question dans le cas non-pondéré.

Conclusion

Malgré le fait que la question reste ouverte dans le cas général, nous avons quand même réussi à prouver une hyperbolicité linéaire en fonction de s pour toute la classe des graphes faiblement modulaires. Quelques résultats annexes sont aussi intéressants et pourraient être utilisés dans une preuve pour d'autres résultats sur la question.

En ce qui me concerne, ce stage a été très enrichissant sur plusieurs points. Tout d'abord il m'a permis d'apprendre des nouvelles méthodes et un savoir d'une branche de l'informatique que je connaissais pas (classes de graphes aux propriétés métriques, enveloppe injective, hyperbolicité, ...). J'ai pu expérimenté le travail en équipe pour résoudre des questions de recherche (réunions 2-3 fois par semaine avec mes encadrants). J'ai eu l'occasion de suivre plusieurs conférences d'équipes, toutes très intéressantes, et d'assister à la soutenance d'une thèse, moment très instructif.

Références

- [1] M. Aigner and M. Fromme. A game of cops and robbers. *Discr. Appl. Math.*, 8 :1–12, 1984.
- [2] H.J. Bandelt and V. Chepoi. Metric graph theory and geometry : a survey. *Mathematics Subject Classification*, 1991.
- [3] J. Chalopin, V. Chepoi, N. Nisse, and Y. Vaxès. Cop and robber games when the robber can hide and ride. *SIAM J. Discrete Math.*, 25 :333–359, 2011.
- [4] V. Chepoi. Graphs of some $cat(0)$ complexes. *Adv. Appl. Math.*, 24 :125–179, 2000.
- [5] V. Chepoi, F. Dragan, B. Estellon, M. Habib, and Y. Vaxès. Diameters, centers, and approximating trees of δ -hyperbolic geodesic spaces and graphs. *Symposium on Computational Geometry*, pages 59–68, 2008.
- [6] F.V. Fomin, P. Golovach, J. Kratochvil, N. Nisse, and K. Suchan. Pursuing a fast robber on a graph. *Theor. Comput. Sci.*, 411 :1167–1181, 2010.
- [7] M. Gromov. Hyperbolic groups. *Essays in group theory (S.M. Gersten ed.)*, *MSRI Series*, 8 :75–263, 1987.
- [8] R.J. Nowakowski and P. Winkler. Vertex-to-vertex pursuit in a graph. *Discr. Math.*, 43 :235–239, 1983.
- [9] A. Quiliot. *Problèmes de jeux, de points fixes, de connectivité et de représentation sur des graphes, des ensembles ordonnés et des hypergraphes*. PhD thesis, Université de Paris, 1983.