

Du Lycée au CNRS

Ordinateurs et mathématiques

Damien Pous

CNRS, ENS de Lyon

Cordées de la réussite, Le Puy-en-Velay, 4.4.14

Mon parcours

- ▶ Maternelle, primaire, collège, lycée, et Baccalauréat
- ▶ Classes Préparatoires 2 ans Toulouse
- ▶ Ecole Normale Supérieure 3 ans Lyon puis Paris
- ▶ Thèse 3 ans Lyon
- ▶ Post-Doctorat 6 mois Philadelphia, USA
- ▶ CNRS CDI Grenoble puis Lyon

Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

“CPGE”, “Prépa”, “Math sup”, “Khâgnes”, ...

- ▶ 2-3 ans, pour préparer des concours

- ▶ Écoles d'ingénieur

Centrale, Mines, ENSAE, ...

- ▶ Écoles de commerce

“HEC”

- ▶ Polytechnique

“X”

- ▶ Normale Sup.

“ENS”

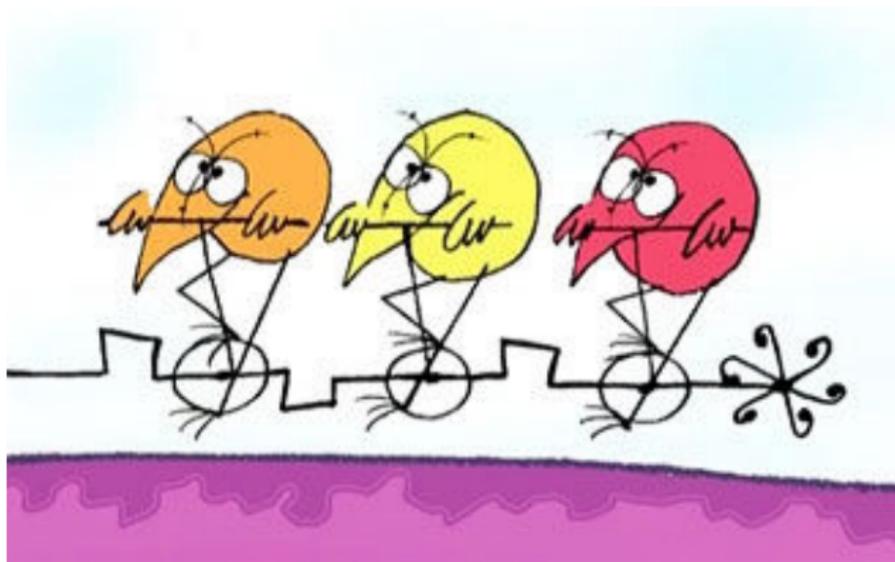
- ▶ ...

- ▶ Plein de débouchés

Ingénierie, Marketing, Politique, Administration,
Finance, Recherche, Enseignement...

Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

“CPGE”, “Prépa”, “Math sup”, “Khâgnes”, ...



- ▶ Intense : on apprend beaucoup, on bosse beaucoup

Ecoles Normales Supérieures



“ENS”, “Normale sup”

- ▶ 4 écoles Paris, Cachan, Rennes, Lyon
- ▶ Toutes disciplines Sport, Droit, Lettres, Géo, Maths, Bio, ...
- ▶ 3-4 ans : L3, M1, M2, Agrégation

Ecoles Normales Supérieures

“ENS”, “Normale sup”



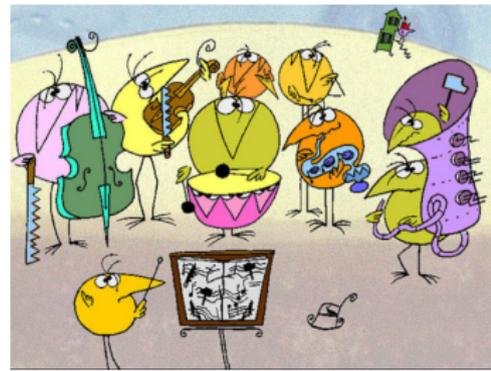
- ▶ 4 écoles Paris, Cachan, Rennes, Lyon
- ▶ Toutes disciplines Sport, Droit, Lettres, Géo, Maths, Bio, ...
- ▶ 3-4 ans : L3, M1, M2, Agrégation
- ▶ Plusieurs stages (en France ou à l'étranger)
- ▶ Programmes Erasmus



Ecoles Normales Supérieures (suite)

► Epanouissant !

- cours passionnants,
- plein de clubs et associations



Ecoles Normales Supérieures (suite)

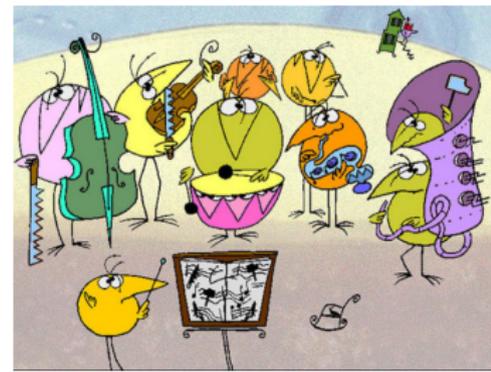
▶ Epanouissant !

- ▶ cours passionnants,
- ▶ plein de clubs et associations



▶ Plusieurs débouchés :

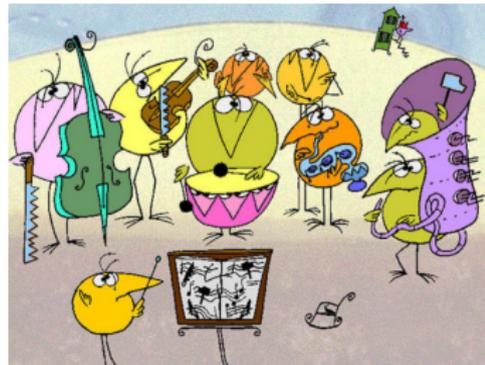
- ▶ Enseignement



Ecoles Normales Supérieures (suite)

▶ Epanouissant !

- ▶ cours passionnants,
- ▶ plein de clubs et associations



▶ Plusieurs débouchés :

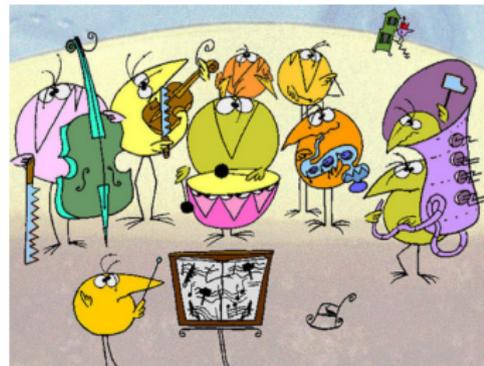
- ▶ Enseignement
- ▶ Haute fonction publique



Ecoles Normales Supérieures (suite)

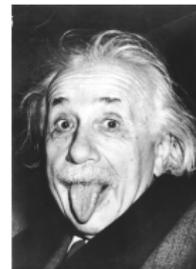
▶ Epanouissant !

- ▶ cours passionnants,
- ▶ plein de clubs et associations



▶ Plusieurs débouchés :

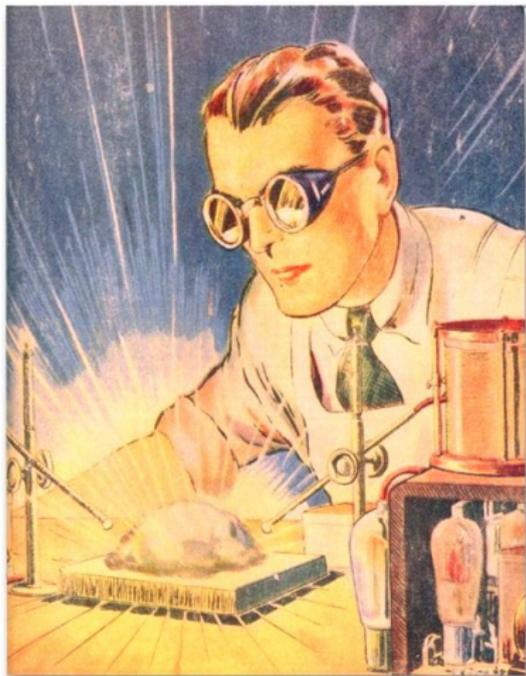
- ▶ Enseignement
- ▶ Haute fonction publique
- ▶ Recherche



Thèse / doctorat

On se lance dans la recherche!

- ▶ Pour au moins 3 ans
- ▶ Sur un sujet très pointu
- ▶ C'est un premier boulot



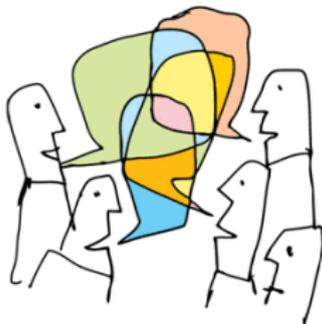
La Recherche

1) "Sur les épaules de géants"

- ▶ Lire, lire, et encore lire
- ▶ Assister à des conférences
- ▶ Discuter avec des collègues

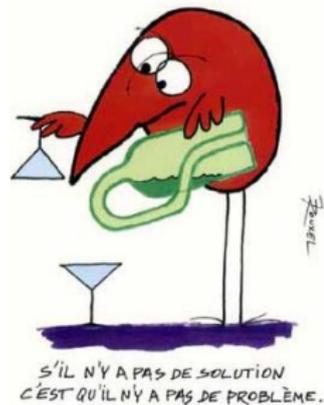


Newton



La Recherche

2) Réflexion / expérimentation

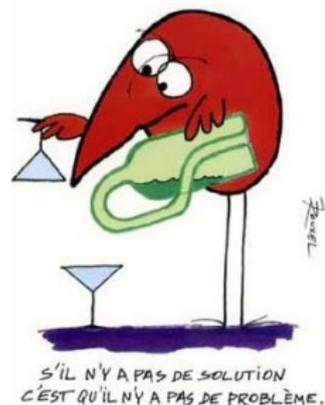
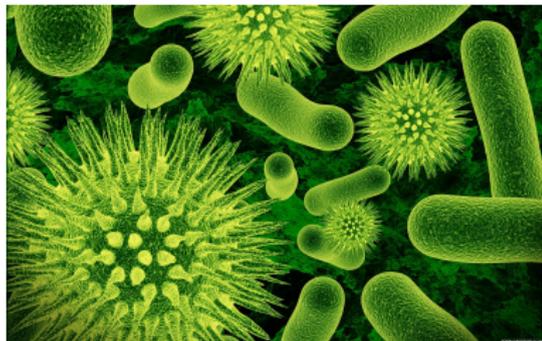


S'IL N'Y A PAS DE SOLUTION
C'EST QU'IL N'Y A PAS DE PROBLÈME.

La Recherche

2) Réflexion / expérimentation

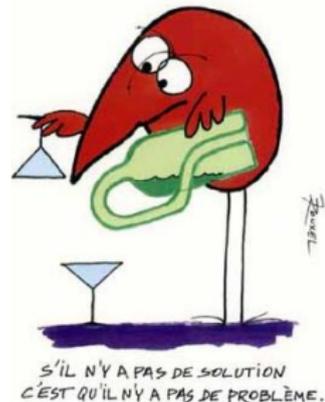
- ▶ Sur des virus, des plantes...



La Recherche

2) Réflexion / expérimentation

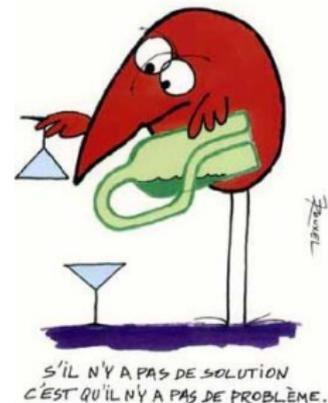
- ▶ Sur des virus, des plantes...
- ▶ Avec un accélérateur de particules



La Recherche

2) Réflexion / expérimentation

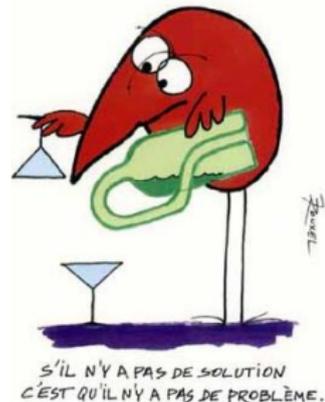
- ▶ Sur des virus, des plantes...
- ▶ Avec un accélérateur de particules
- ▶ En antarctique



La Recherche

2) Réflexion / expérimentation

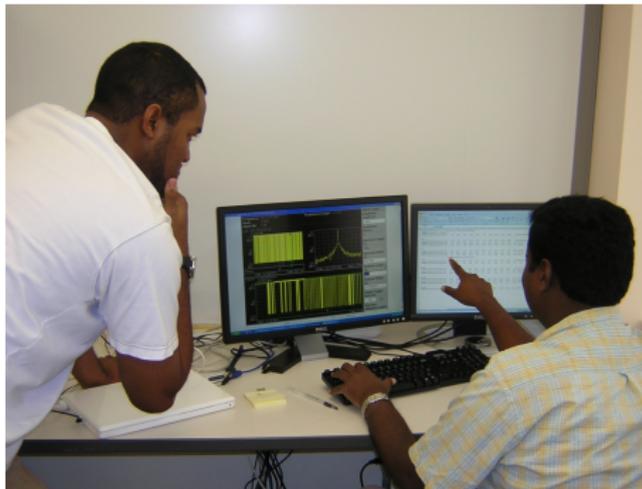
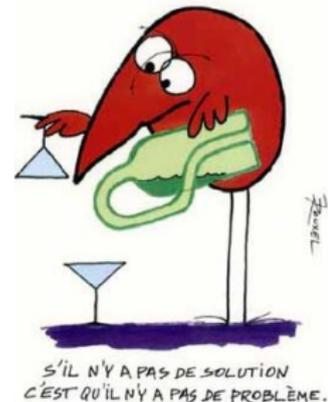
- ▶ Sur des virus, des plantes...
- ▶ Avec un accélérateur de particules
- ▶ En antarctique
- ▶ Au tableau



La Recherche

2) Réflexion / expérimentation

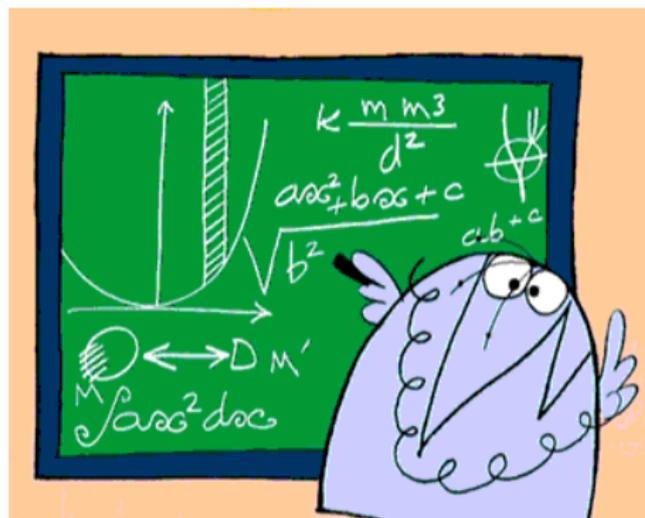
- ▶ Sur des virus, des plantes...
- ▶ Avec un accélérateur de particules
- ▶ En antarctique
- ▶ Au tableau
- ▶ Sur ordinateur



La Recherche

3) Diffusion

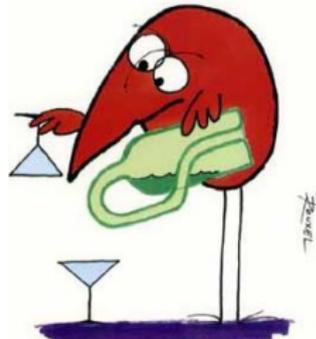
- ▶ Rédaction d'articles, de livres
- ▶ Conférences
- ▶ Cours



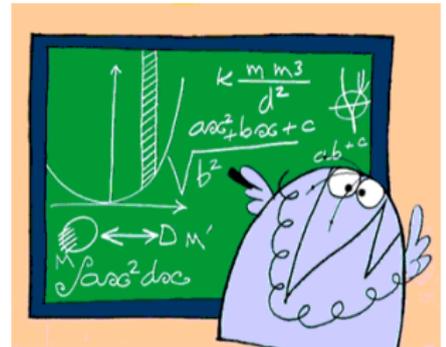
Résumé : la Recherche

1. Lecture
2. Réflexion / expérimentation
3. Diffusion

“Sur les épaules de géants”



S'IL N'Y A PAS DE SOLUTION
C'EST QU'IL N'Y A PAS DE PROBLÈME.



Ordinateurs et Mathématiques

Le Théorème des Trois couleurs

“Toute carte peut être coloriée avec trois couleurs seulement”

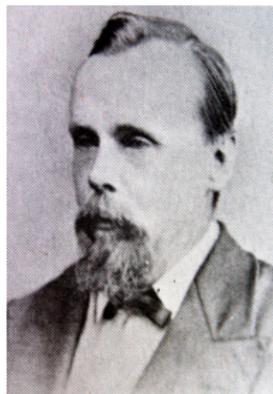
Cartempion, 1742

Exemple : l'Europe

→ <http://tinyurl.com/q6gawq8>

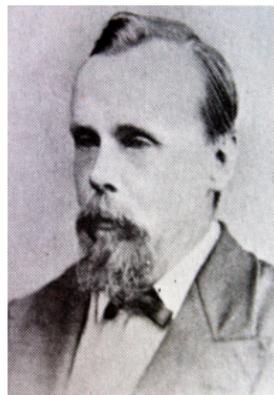
Le Théorème des Quatre couleurs

- ▶ Conjecturé en 1852 (Guthrie)



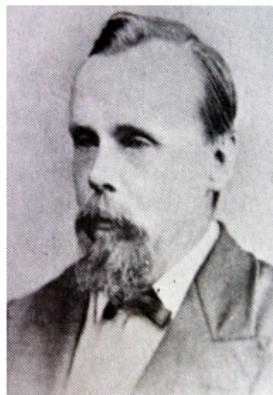
Le Théorème des Quatre couleurs

- ▶ Conjecturé en 1852 (Guthrie)
- ▶ Preuve en 1879 (Kempe)



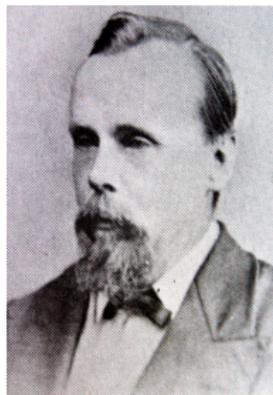
Le Théorème des Quatre couleurs

- ▶ Conjecturé en 1852 (Guthrie)
- ▶ Preuve en 1879 (Kempe)
- ▶ Autre preuve en 1880 (Tait)



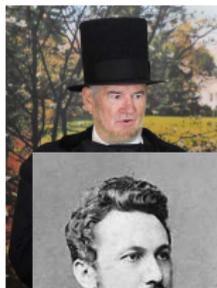
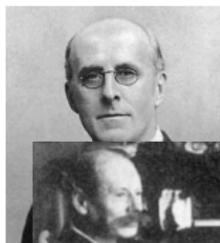
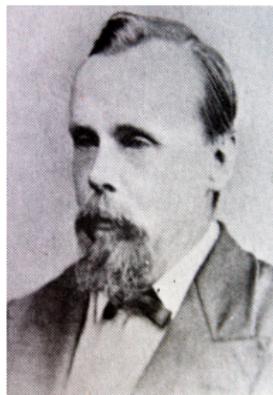
Le Théorème des Quatre couleurs

- ▶ Conjecturé en 1852 (Guthrie)
- ▶ Preuve en 1879 (Kempe) – fausse 1890 (Heawood)
- ▶ Autre preuve en 1880 (Tait)



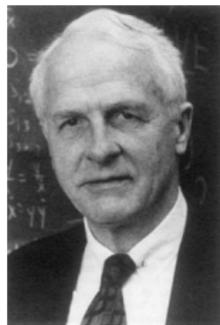
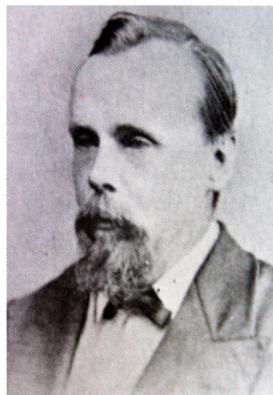
Le Théorème des Quatre couleurs

- ▶ Conjecturé en 1852 (Guthrie)
- ▶ Preuve en 1879 (Kempe) – fausse 1890 (Heawood)
- ▶ Autre preuve en 1880 (Tait) – fausse 1891 (Petersen)



Le Théorème des Quatre couleurs

- ▶ Conjecturé en 1852 (Guthrie)
- ▶ Preuve en 1879 (Kempe) – fausse 1890 (Heawood)
- ▶ Autre preuve en 1880 (Tait) – fausse 1891 (Petersen)
- ▶ 1913 (Birkhoff), 1969 (Heesch) : ça avance...



Idée de la méthode de Heesch



Par contradiction :

1. S'il existe une carte non coloriable, alors l'une des 1478 cartes suivantes n'est pas coloriable non plus
2. Ces 1478 cartes ont l'air coloriables

Donc toutes les cartes sont coloriables

Idée de la méthode de Heesch



Par contradiction :

1. S'il existe une carte non coloriable, alors l'une des 1478 cartes suivantes n'est pas coloriable non plus
2. Ces 1478 cartes ont l'air coloriables

Donc toutes les cartes sont coloriables

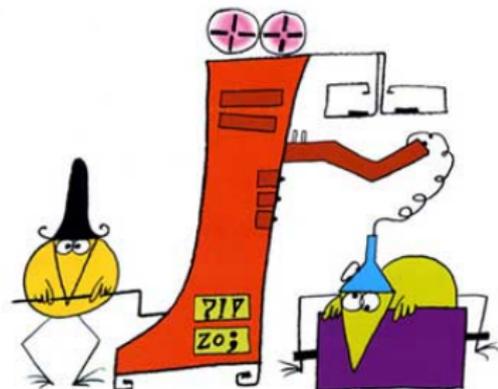
Problème :

Comment vérifier que ces 1478 cartes sont bien coloriables ?

La première "vraie" preuve

Appel et Haken, 1976, à l'aide d'un ordinateur

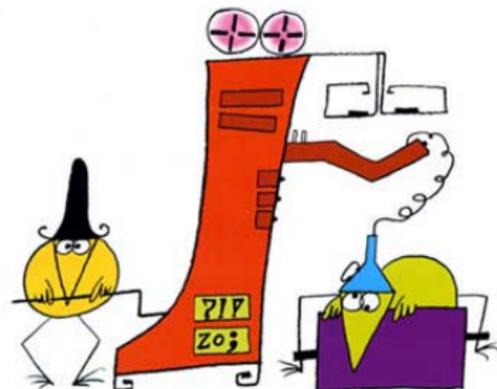
- ▶ Ils écrivent un programme qui



La première "vraie" preuve

Appel et Haken, 1976, à l'aide d'un ordinateur

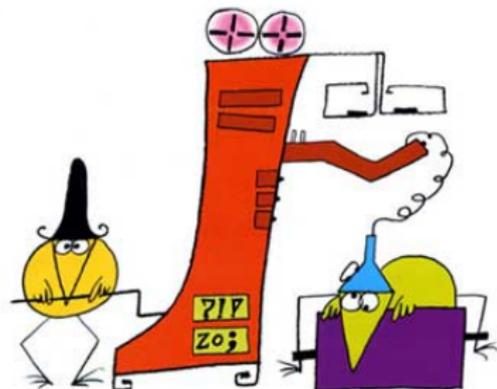
- ▶ Ils écrivent un programme qui
 - ▶ construit les 1478 cartes



La première "vraie" preuve

Appel et Haken, 1976, à l'aide d'un ordinateur

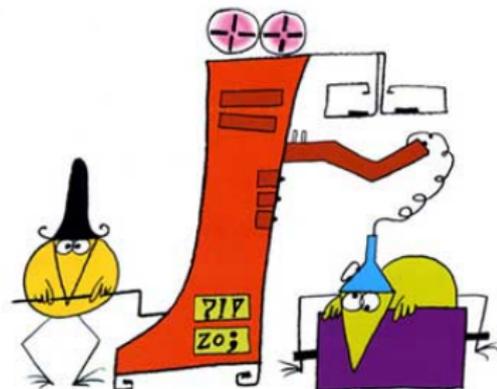
- ▶ Ils écrivent un programme qui
 - ▶ construit les 1478 cartes
 - ▶ vérifie qu'elles sont coloriables



La première "vraie" preuve

Appel et Haken, 1976, à l'aide d'un ordinateur

- ▶ Ils écrivent un programme qui
 - ▶ construit les 1478 cartes
 - ▶ vérifie qu'elles sont coloriables
- ▶ Ils lancent le programme

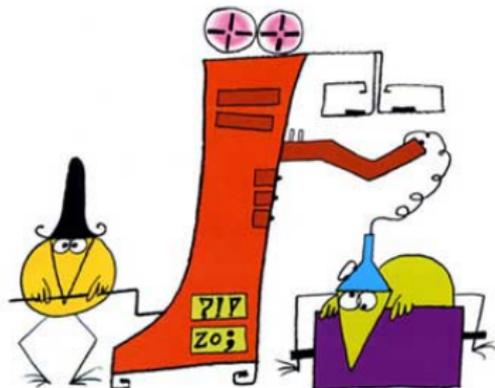


La première "vraie" preuve

Appel et Haken, 1976, à l'aide d'un ordinateur

- ▶ Ils écrivent un programme qui
 - ▶ construit les 1478 cartes
 - ▶ vérifie qu'elles sont coloriables
- ▶ Ils lancent le programme
- ▶ 50 heures plus tard, le programme répond :

"C'est bon !"

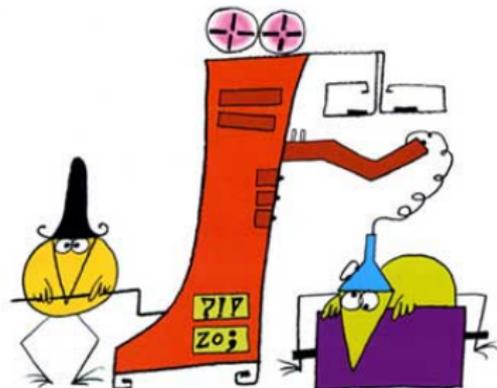


La première "vraie" preuve

Appel et Haken, 1976, à l'aide d'un ordinateur

- ▶ Ils écrivent un programme qui
 - ▶ construit les 1478 cartes
 - ▶ vérifie qu'elles sont coloriables
- ▶ Ils lancent le programme
- ▶ 50 heures plus tard, le programme répond :

"C'est bon !"



La première "vraie" preuve

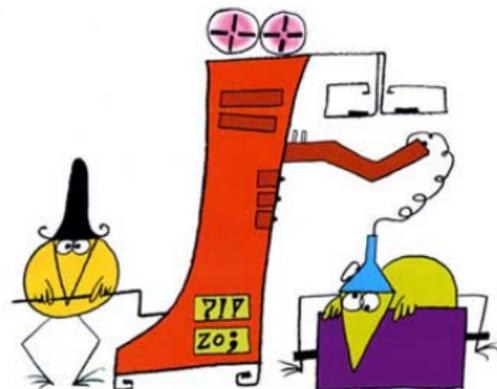
Appel et Haken, 1976, à l'aide d'un ordinateur

- ▶ Ils écrivent un programme qui
 - ▶ construit les 1478 cartes
 - ▶ vérifie qu'elles sont coloriables
- ▶ Ils lancent le programme
- ▶ 50 heures plus tard, le programme répond :

"C'est bon !"



Réaction des Mathématiciens :



La première "vraie" preuve

Appel et Haken, 1976, à l'aide d'un ordinateur

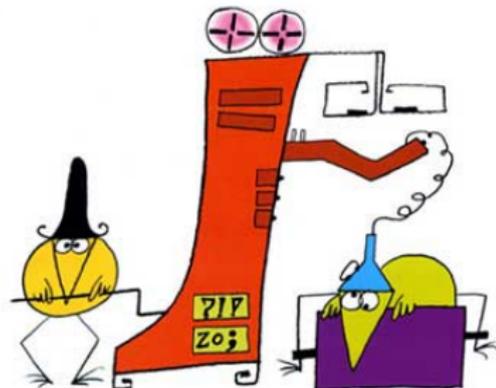
- ▶ Ils écrivent un programme qui
 - ▶ construit les 1478 cartes
 - ▶ vérifie qu'elles sont coloriables
- ▶ Ils lancent le programme
- ▶ 50 heures plus tard, le programme répond :

"C'est bon !"



Réaction des Mathématiciens :

"Quelle horreur, un ordinateur !"



Faire confiance aux ordinateurs



Votre ordinateur a rencontré un problème et doit redémarrer.
Nous collectons simplement des informations relatives aux
erreurs, puis nous allons redémarrer l'ordinateur. (0 % effectués)

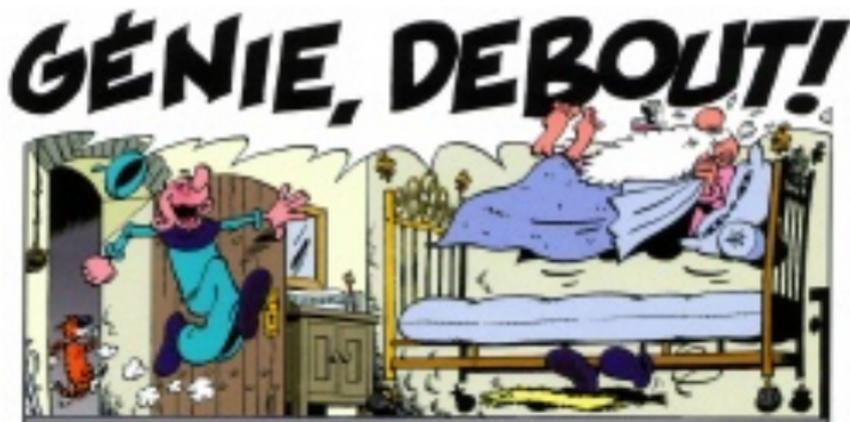
Pour en savoir plus, vous pouvez rechercher cette erreur en ligne ultérieurement : INACCESSIBLE_BOOT_DEVICE

Que se passerait-il si :

Que se passerait-il si :



- ▶ Votre téléphone sonnait une heure plus tôt ?



Que se passerait-il si :



- ▶ Votre téléphone sonnait une heure plus tôt ?
- ▶ Facebook publiait votre profil à vos parents ?

Que se passerait-il si :



- ▶ Votre téléphone sonnait une heure plus tôt ?
- ▶ Facebook publiait votre profil à vos parents ?
- ▶ Gmail se trompait de destinataire ?



Que se passerait-il si :



- ▶ Votre téléphone sonnait une heure plus tôt ?
- ▶ Facebook publiait votre profil à vos parents ?
- ▶ Gmail se trompait de destinataire ?
- ▶ Votre carte bleue ne débitait pas les bons montants ?



Que se passerait-il si :



- ▶ Votre téléphone sonnait une heure plus tôt ?
- ▶ Facebook publiait votre profil à vos parents ?
- ▶ Gmail se trompait de destinataire ?
- ▶ Votre carte bleue ne débitait pas les bons montants ?
- ▶ Le pilote automatique d'un avion plantait ?



Accueil > Terre

Un astéroïde va frôler la Terre, mais pas de panique

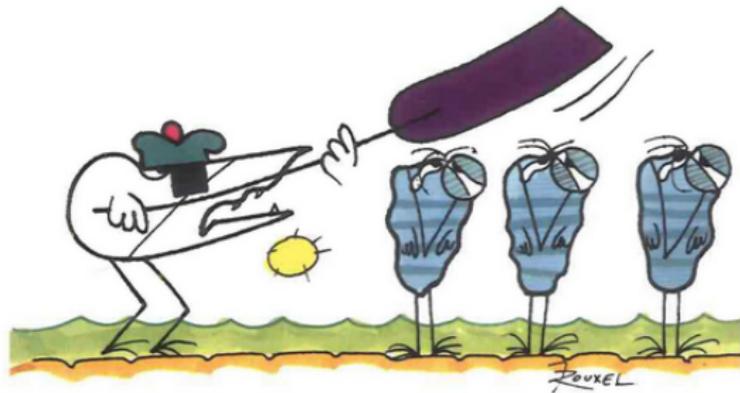
8 FEVRIER 2013 À 00:23



Image fournie par la Nasa de la Terre et de la Lune. (Photo AFP)

Il s'agit du plus gros objet jamais anticipé qui s'approchera aussi près, mais il ne touchera pas la planète.

A qui la faute ?



1. l'utilisateur
2. le programmeur
3. le compilateur
4. le scientifique
5. l'ordinateur

Plus jamais ça

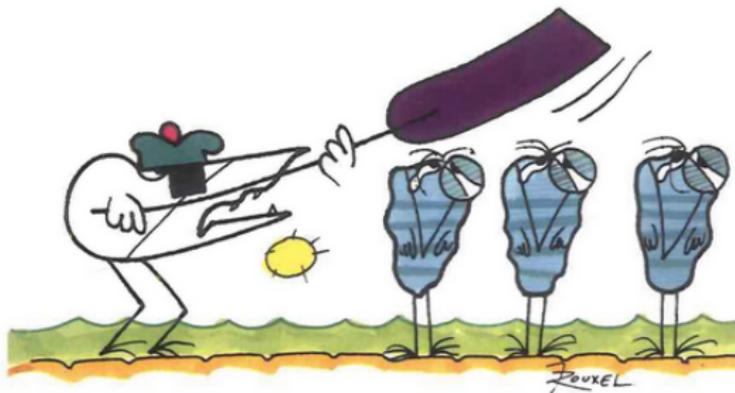


1. faute de l'utilisateur
2. faute du programmeur
3. faute du compilateur
4. faute du scientifique
5. faute de l'ordinateur

pas de chance :(

pas de chance :(

Plus jamais ça



1. faute de l'utilisateur
2. faute du programmeur
3. faute du compilateur
4. faute du scientifique
5. faute de l'ordinateur

pas de chance :(

tests

tests

tests pas de chance :(

Plus jamais ça



1. faute de l'utilisateur
2. faute du programmeur
3. faute du compilateur
4. faute du scientifique
5. faute de l'ordinateur

pas de chance :(

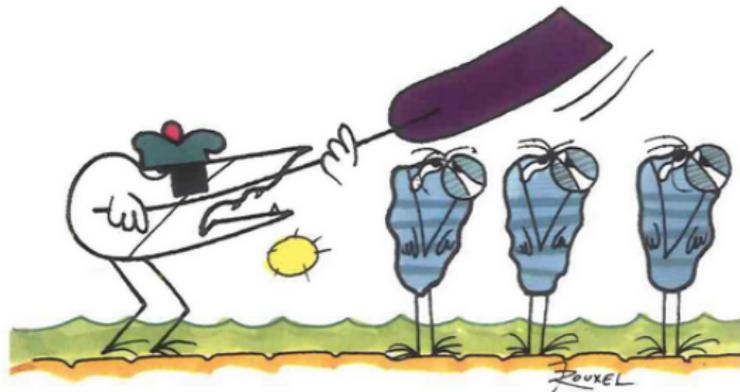
tests

tests

tests pas de chance :(

Et si on ne fait pas assez de tests ?

Plus jamais ça



1. faute de l'utilisateur
2. faute du programmeur
3. faute du compilateur
4. faute du scientifique
5. faute de l'ordinateur

pas de chance :(

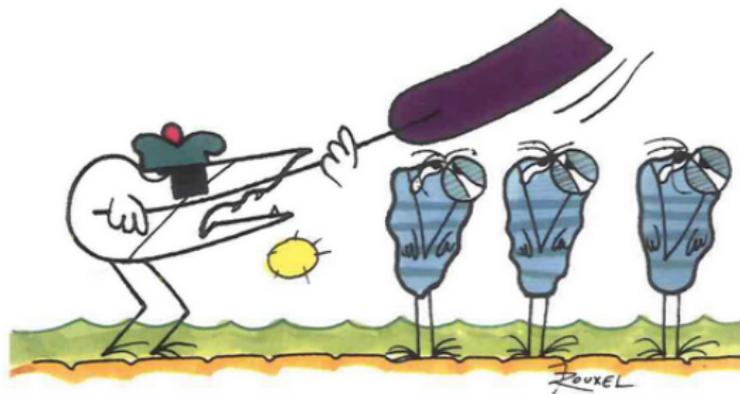
tests preuve

tests preuve

tests preuve pas de chance :(

Et si on ne fait pas assez de tests ?

Plus jamais ça



1. faute de l'utilisateur
2. faute du programmeur
3. faute du compilateur
4. faute du scientifique
5. faute de l'ordinateur

pas de chance :(

tests preuve

tests preuve

tests preuve pas de chance :(

Et si on ne fait pas assez de tests ?

Et si on se trompe dans les preuves ?

Plus jamais ça



1. faute de l'utilisateur
2. faute du programmeur
3. faute du compilateur
4. faute du scientifique
5. faute de l'ordinateur

pas de chance :(

tests preuve relecture

tests preuve relecture

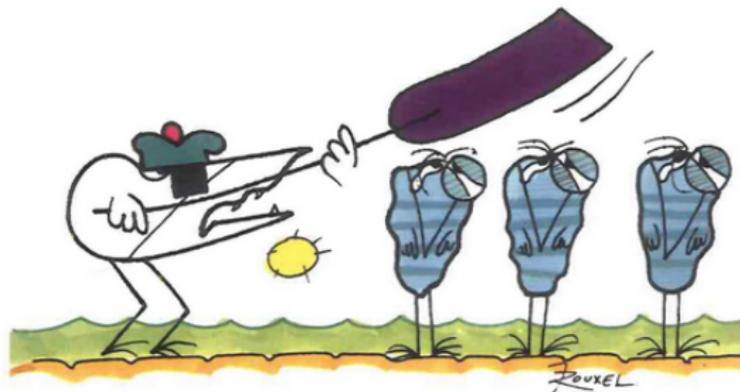
relecture

tests preuve relecture pas de chance :(

Et si on ne fait pas assez de tests ?

Et si on se trompe dans les preuves ?

Plus jamais ça



1. faute de l'utilisateur pas de chance :(
2. faute du programmeur tests preuve relecture
3. faute du compilateur tests preuve relecture
4. faute du scientifique relecture
5. faute de l'ordinateur tests preuve relecture pas de chance :(

Et si on ne fait pas assez de tests ?

Et si on se trompe dans les preuves ?

Et si les relecteurs ne voient pas une faute ?

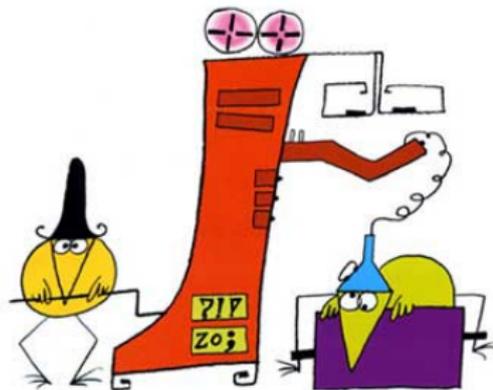
Vérifier les preuves

Vérifier les preuves

- ▶ Trouver ou écrire une preuve : **difficile**
- ▶ Vérifier une preuve :
 - ▶ **facile** (si la preuve est bien écrite)
 - ▶ **rébarbatif** (si la preuve est longue)

Vérifier les preuves

- ▶ Trouver ou écrire une preuve : **difficile**
 - ▶ Vérifier une preuve :
 - ▶ **facile**
 - ▶ **rébarbatif**
 - ▶ autant utiliser un ordinateur!
- (si la preuve est bien écrite)
(si la preuve est longue)



Coq



1960 Isomorphisme de Curry-Howard :

“prouver \sim programmer”

Coq



1960 Isomorphisme de Curry-Howard :

“prouver \sim programmer”

1980 Thierry Coquand

- ▶ Un langage informatique, pour écrire des preuves
- ▶ Un (tout petit) programme pour les vérifier



Démo : Coq



L'oeuf et la poule

- ▶ Coq vérifie les preuves
- ▶ Qui vérifie Coq ?



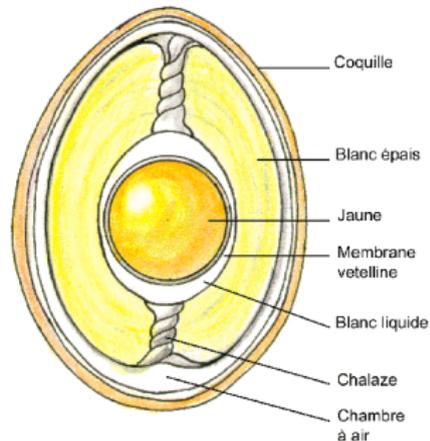
L'oeuf et la poule

- ▶ Coq vérifie les preuves
- ▶ Qui vérifie Coq ?



Principe de de Bruijn :

- ▶ seule une partie de Coq doit être fiable
- ▶ cette partie est toute petite



Pour conclure



Coq a récemment été utilisé pour :

- ▶ prouver le théorème des 4 couleurs (Gonthier, 2004)
- ▶ certifier un compilateur (Leroy, 2009)



Pour conclure



Coq a récemment été utilisé pour :

- ▶ prouver le théorème des 4 couleurs (Gonthier, 2004)
- ▶ certifier un compilateur (Leroy, 2009)



On essaie aujourd'hui de l'utiliser pour :

- ▶ des cartes à puce
- ▶ des calculs de trajectoire



Résumé : parcours et alternatives

- ▶ Classes Préparatoires 2 ans
→ grandes écoles
- ▶ Ecole Normale Supérieure 3 ans
→ enseignement, administration, médecine
- ▶ Thèse 3 ans
→ enseignement, administration, privé
- ▶ Post-Doctorat, CNRS

