Un peu de λ-calcul

Qu'est-ce?

- le cœur d'un langage de programmation fonctionnelle
  - étudier une extension nouvelle pour un langage de programmation passe volontiers par l'étude d'un λ-calcul étendu par *quelques* mécanismes
- le formalisme dans lequel sont développées de nombreuses méthodes pour l'analyse de programmes
  - systèmes de types
  - preuve de programmes

- avant cela:

  un modèle élémentaire exprimant la notion de calcul

Les *termes* du λ-calcul

la syntaxe:

$$\boxed{M \quad ::= \lambda x.\, M \mid M\, M' \mid x} \qquad \texttt{fun x -> m | m m' | x}$$

$\lambda x.M$**, c'est** `fun x -> M`

- $\lambda x.\, M$: abstraction $M\, M'$: application
- il n'y a plus que des fonctions

  pas d'`int`, de `bool`, de types somme, de filtrage, de `ref`, d'exceptions
- λ est un lieur
  - $\mathrm{vl}(M)$: variables libres de M
  - α-conversion: on identifie $\lambda x.\, M$ et $\lambda y.\, M[y/x]$, pour peu que $y \notin \mathrm{vl}(M)$
- exemples: $\lambda x.\, x$ $\lambda xy.\, (y\, x)$ $\lambda u.\, v\, (\lambda u.\, u)\, u$
  - on note $\lambda xyz.\, M$ pour $\lambda x.\, \lambda y.\, \lambda z.\, M$ *(cf.* `fun x y z -> ..`*)*
  - similairement, $M\, M'\, M''$ représente $(M\, M')\, M''$

Un calcul de *fonctions*

règle de calcul: la β-réduction

$$\boxed{(\lambda x.\, M)\ M' \quad \to \quad M[M'/x]}$$

- exemple: $\big(\lambda uv.\,(v\,u\,u)\big)\ (\lambda x.\,x) \quad \to \quad \lambda v.\,\big(v\,(\lambda x.\,x)\,(\lambda x.\,x)\big)$
- $M[M'/x]$: on remplace x par M' dans M *en faisant des α-conversions si nécessaire* *(substitution)*
- exemple: les entiers de Church

  $1 = \lambda f\,x.\,(f\,x) \quad 2 = \lambda f\,x.\,(f\,(f\,x)) \quad n = \lambda f\,x.\,(f^n\,x)$

  - définition du successeur? de l'addition? de la multiplication?

    $\lambda n.\,\lambda f\,x.\,f\,(n\,f\,x) \quad \lambda n\,m.\,\lambda f\,x.\,(n\,f\,(m\,f\,x)) \quad \lambda n\,m.\,\lambda f\,x.\,(n\,(m\,f)\,x)$
  - définition de zéro? $\lambda f\,x.\,x$
  - type des entiers? `('a -> 'a) -> 'a -> 'a`
- *calculer* $\leftrightarrow$ passer son argument à une fonction

  notion de fonction différente de la notion usuelle en maths
- $(\lambda x.\,M)\,M'$ est un *redex*

  un terme peut "contenir" plusieurs redex

Relation de réduction

- on définit la manière dont les termes se réduisent par des *règles d'inférence*

$$\frac{}{(\lambda x.\, M)\, M' \quad \to \quad M[M'/x]}\ \beta \qquad \frac{M \to M'}{M\, N \to M'\, N}\ \mu_l$$

$$\frac{M \to M'}{N\, M \to N\, M'}\ \mu_r \qquad \frac{M \to M'}{\lambda x.\, M \ \to\ \lambda x.\, M'}\ \xi$$

- β, μ_l, μ_r, ξ sont les noms des règles (pour faire joli)
- implicitement, chaque "identificateur" (*metavariable*) qu'on mentionne est quantifié universellement

  pour tout M, pour tout N, pour tout x,...
- au-dessus: prémisses/hypothèses, en dessous: la conclusion
- ces règles définissent des *arbres de dérivation*
  - aux feuilles: β / aux nœuds: μ_l, μ_r, ξ
- ceci définit la relation de réduction, notée $\to$

  c'est en fait le même genre de définition que pour la syntaxe

la semaine prochaine, un **TD** *et non un TP*

surveillez le panneau d'affichage pour savoir où

Le λ-calcul

- termes du λ-calcul: $\quad M \;::=\; \lambda x.\, M \mid M\, M' \mid x$
- calcul dans les termes: β-reduction

$$\frac{}{(\lambda x.\, M)\, M' \;\to\; M[M'/x]}\;\beta \qquad \frac{M \to M'}{M\, N \to M'\, N}\;\mu_l$$

$$\frac{M \to M'}{N\, M \to N\, M'}\;\mu_r \qquad \frac{M \to M'}{\lambda x.\, M \to \lambda x.\, M'}\;\xi$$

  - un axiome (β), trois règles d'inférence
  - un terme *est* un β-redex, ou *contient* un β-redex

Exemples de dérivations pour la réduction

$$\frac{}{(\lambda x.\, M)\, M' \quad \to \quad M[M'/x]}\ \beta \qquad \frac{M \to M'}{M\, N \to M'\, N}\ \mu_l$$

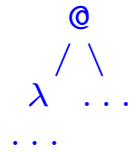
$$\frac{M \to M'}{N\, M \to N\, M'}\ \mu_r \qquad \frac{M \to M'}{\lambda x.\, M \ \to\ \lambda x.\, M'}\ \xi$$

réductions de $\big((\lambda xyz.\, y\, x)\, \lambda u.\, u\big)\ \big((\lambda h.\, h\, h)\, \lambda t.\, t\big)$

$$\frac{\dfrac{}{(\lambda h.\, h\, h)\, \lambda t.\, t \to (\lambda t.\, t)\, \lambda t'.\, t'}\ \beta}{\big((\lambda xyz.\, y\, x)\, \lambda u.\, u\big)\ \big((\lambda h.\, h\, h)\, \lambda t.\, t\big) \to \big((\lambda xyz.\, y\, x)\, \lambda u.\, u\big)\ \big((\lambda t.\, t)\, \lambda t'.\, t'\big)}\ \mu_r$$

$$\frac{\dfrac{}{(\lambda xyz.\, y\, x)\, \lambda u.\, u \to \lambda yz.\, y\, (\lambda u.\, u)}\ \beta}{\big((\lambda xyz.\, y\, x)\, \lambda u.\, u\big)\ \big((\lambda h.\, h\, h)\, \lambda t.\, t\big) \to \big(\lambda yz.\, y\, (\lambda u.\, u)\big)\ \big((\lambda h.\, h\, h)\, \lambda t.\, t\big)}\ \mu_l$$

Des arbres, et encore des arbres

- on passe son temps à définir des arbres
- la syntaxe, c'est des arbres
  - un terme du λ-calcul est un arbre
  - un redex est un sous-arbre de la forme 
- pour réduire un terme, on construit un *arbre de dérivation*
  - la question suivante

    "étant donnés deux termes M et N, est-ce que $M \longrightarrow N$?"

    se reformule en

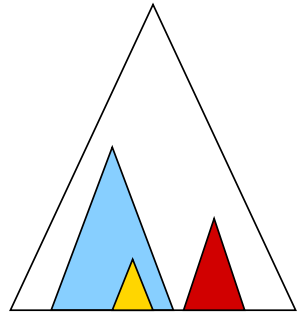
    "existe-t-il un arbre de dérivation ayant $M \longrightarrow N$ à la racine?"
  - idem pour "quels sont les M' tels que $M \longrightarrow M'$?"
  - similairement, pour Caml, on aurait des règles du genre

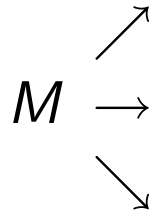
$$\frac{e_1 \longrightarrow e_1' \qquad e_2 \longrightarrow e_2'}{(e_1\,,e_2) \longrightarrow (e_1'\,,e_2')}$$

$$\frac{e_1 \longrightarrow \texttt{true} \qquad e_2 \longrightarrow e'}{\texttt{if}\ e_1\ \texttt{then}\ e_2\ \texttt{else}\ e_3 \longrightarrow e'} \qquad \frac{e_1 \longrightarrow \texttt{false} \qquad e_3 \longrightarrow e'}{\texttt{if}\ e_1\ \texttt{then}\ e_2\ \texttt{else}\ e_3 \longrightarrow e'}$$

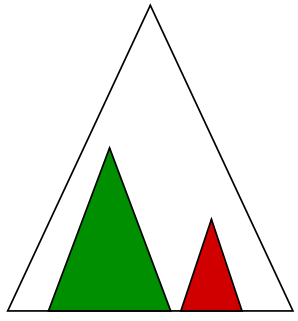
Propriétés de la réduction: confluence

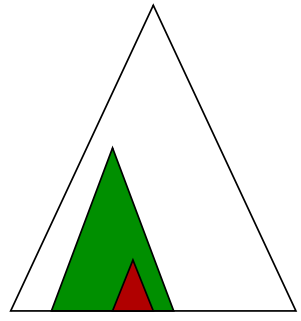
- dans un terme donné, un certain nombre de redex





- un choix risque-t-il d'être irrémédiable?





réponse: non, le λ-calcul est confluent

- mais on n'a pas donné de preuve:
  on a **esquissé** une preuve de *confluence locale* (cf. Prog 2)

Propriétés de la réduction: terminaison

- réduisons $\Omega \;=\; (\lambda x.(x\,x))\;(\lambda x.(x\,x))$ (qui est un redex)
- certains termes du λ-calcul divergent

  noter au passage qu'on utilise deux fois l'argument x, et aussi qu'il y a de l'auto-application

- types simples pour le λ-calcul:
  - on n'a droit à $(f\,x)$ que si $f : T \to T'$ et $x : T$

    (alors $(f\,x) : T'$)
  - Thm.: si M est bien typé, alors M ne diverge pas
  - existe-t-il des termes mal typés qui ne divergent pas?

- on a un *modèle de calcul*, pas mal abstrait
  - syntaxe, réduction ($M \to M'$)
  - en quoi est-on proche (ou pas) de Caml?
  - que faire pour voir le λ-calcul comme un *modèle de la programmation* (fonctionnelle)?

λ-calcul: stratégies

Le λ-calcul *faible*

$$\frac{}{(\lambda x.\, M)\, M' \;\to\; M[M'/x]}\;\beta \qquad \frac{M \to M'}{M\,N \to M'\,N}\;\mu_l$$

$$\frac{M \to M'}{N\,M \to N\,M'}\;\mu_r \qquad \frac{}{(\lambda x.\, M)\, M' \;\to_{\mathrm{f}}\; M[M'/x]}\;\beta \qquad \frac{M \to_{\mathrm{f}} M'}{M\,N \to_{\mathrm{f}} M'\,N}\;\mu_l$$

$$\frac{M \to_{\mathrm{f}} M'}{N\,M \to_{\mathrm{f}} N\,M'}\;\mu_r \qquad \frac{M \to M'}{\lambda x.\, M \;\to\; \lambda x.\, M'}\;\xi$$

- en Caml, la règle ξ n'est pas autorisée: λ-calcul *faible*
  - ainsi on peut *compiler* les fonctions

    "si on veut pouvoir réduire sous λ, il faut disposer du source"
- ceci définit *une autre* notion de réduction des termes: $\to_{\mathrm{f}}$
  - en λ faible, toute fonction est une *valeur* (i.e., quelque chose qu'on ne peut plus réduire)
    - même $\lambda y.\, \Omega$, où $\Omega \;=\; (\lambda x.\, (x\,x))\;(\lambda x.\, (x\,x))$
    - $\lambda y.\, \Omega$ diverge pour le λ-calcul, et converge pour le λ-calcul faible $\quad \lambda y.\, \Omega \;\not\to_{\mathrm{f}}$
- une fois la règle ξ éliminée, sait-on "exécuter les

La stratégie outermost

on élimine ξ et μ_r: $\dfrac{}{(\lambda x.\, M)\, M' \;\to_{\mathrm{o}}\; M[M'/x]}\;\beta$ $\qquad$ $\dfrac{M \to_{\mathrm{o}} M'}{M\,N \to_{\mathrm{o}} M'\,N}\;\mu_l$

- on va chercher le redex le plus à gauche (μ_l), et on réduit (β)
- intuitivement, lorsqu'on réduit $M_1\ M_2\ M_3$
  - on attaque M_1 jusqu'à ce que ça devienne une fonction
  - on passe alors l'argument M_2 (tel quel, non réduit), et on recommence jusqu'à ce que ça devienne une fonction
  - on passe M_3, et on recommence
- λ $(\beta, \xi, \mu_l, \mu_r) \supset$ λ faible $(\beta, \mu_l, \mu_r) \supset$ λ outermost (β, μ_l)

  $(M \to_{\mathrm{o}} M')$ implique $(M \to_{\mathrm{f}} M')$, qui implique $(M \to M')$
- rappel: outermost est la stratégie des paresseux

  (outermost + partage = stratégie de Haskell)
- en Caml, un argument est évalué avant d'être passé à une fonction

  face à $M_1\ M_2$, on veut faire "du μ_l et du μ_r"

La stratégie innermost

- on ne passe à une fonction qu'un argument qu'on ne peut plus réduire (une *valeur*)

  valeurs $V ::= \lambda x.\, M \mid x$

  un terme est une valeur si c'est une variable ou une abstraction

$$\frac{}{(\lambda x.\, M)\, V \;\to\; M[V/x]}\ \beta_v$$

$$\frac{M \to M'}{M\,N \to M'\,N}\ \mu_l \qquad \frac{M \to M'}{M\,V \to M'\,V}\ \mu_{lv}$$

$$\frac{M \to M'}{N\,M \to N\,M'}\ \mu_r \qquad \frac{M \to M'}{V\,M \to V\,M'}\ \mu_{rv} \qquad \frac{M \to M'}{N\,M \to N\,M'}\ \mu_r$$

- on y est presque: il faut encore 'diriger' le choix entre μ_l et μ_r