

The slide features a decorative border composed of various elements. On the left and bottom-left sides, there is a dense arrangement of circular icons. These icons include stylized human faces, some with a skull and crossbones, and others with a '5' inside. Interspersed among these are green and orange spheres. On the right side, there is a large, detailed illustration of several oranges with green leaves. The background is white, and the text is centered in the middle.


Arrangements optimaux de disques et de sphères

Daria Pchelina
équipe MC2, LIP, CNRS

Journées "filles, maths et informatique"

28/11/2024


Arrangements optimaux de pièces de monnaie

Étant donné un nombre infini de pièces identiques () ,
comment les placer sur un plan sans chevauchement pour recouvrir le plus de surface ?

arrangement :

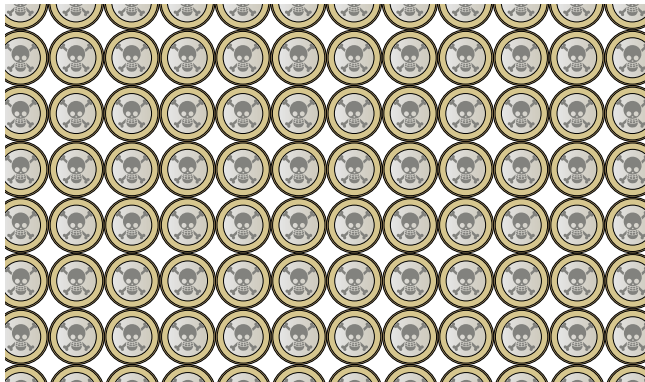


Arrangements optimaux de pièces de monnaie


Étant donné un nombre infini de pièces identiques () ,
comment les placer sur un plan sans chevauchement pour recouvrir le plus de surface ?

arrangement

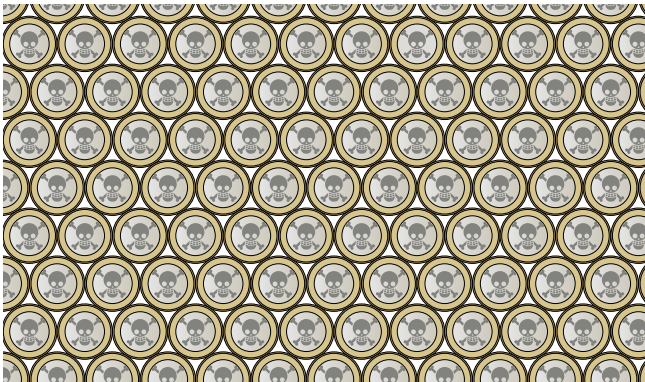
:



Arrangements optimaux de pièces de monnaie

Étant donné un nombre infini de pièces identiques () ,
comment les placer sur un plan sans chevauchement pour recouvrir le plus de surface ?

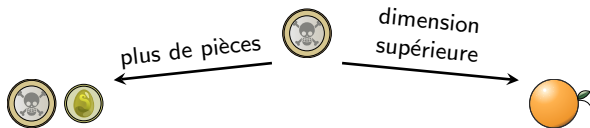
arrangement **hexagonal** :



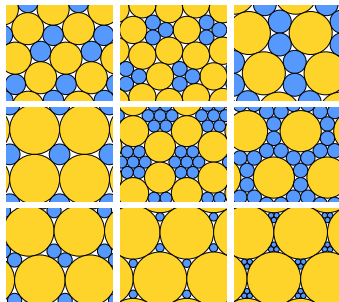
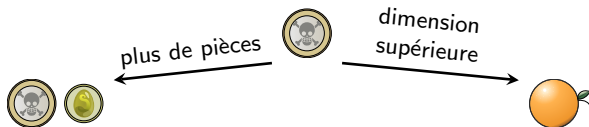
1910–1940

L'arrangement hexagonal est optimal.

Généralisation du problème



Généralisation du problème



(démontré optimaux en 2000–2022)

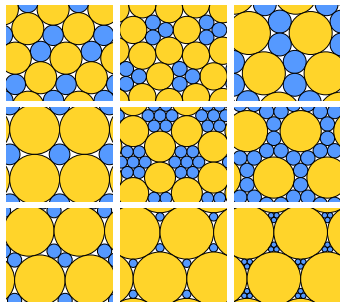
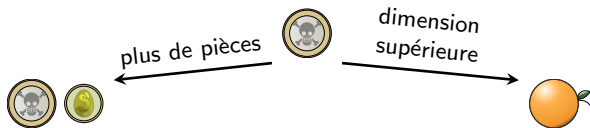
Conjecture de Kepler, 1611

“L’empilement des oranges” est optimal :



(démontré en 1998–2014)

Généralisation du problème



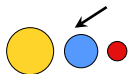
(démonstré optimaux en 2000–2022)

Conjecture de Kepler, 1611

“L’empilement des oranges” est optimal :



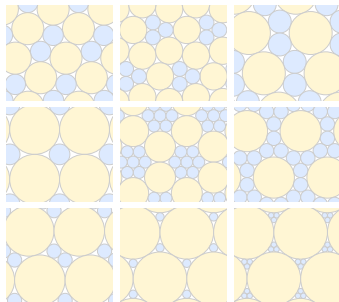
(démonstré en 1998–2014)



$\mathbb{R}^8, \mathbb{R}^{24}$

(Viazovska, Médaille Fields 2022)

Généralisation du problème



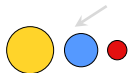
(démontré optimaux en 2000–2022)

Conjecture de Kepler, 1611

“L’empilement des oranges” est optimal :



(démontré en 1998–2014)

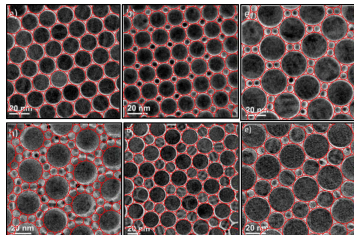


$\mathbb{R}^8, \mathbb{R}^{24}$
(Viazovska, Médaille Fields 2022)

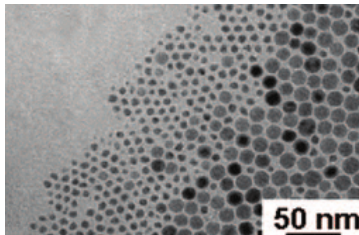
combiner différents types de nanoparticules
auto-assemblage

nouveau matériau

séparation de phase

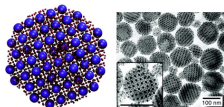


Paik et al 2015



Cheon et al 2006

Aussi en 3D :



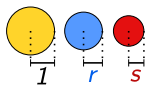
Wu, Fan, Yin 2022

Question des chimistes :

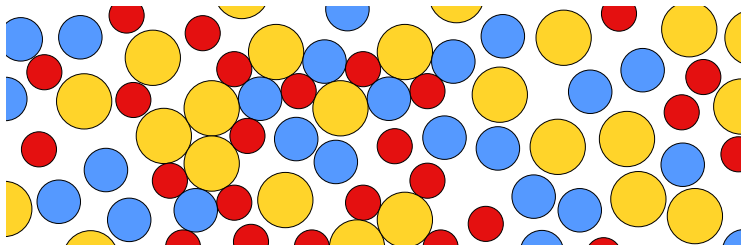
quelles tailles et concentrations permettent d'obtenir de nouveaux matériaux ?

Définitions

Disques :

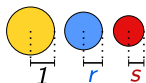


Arrangement P :
(dans \mathbb{R}^2)

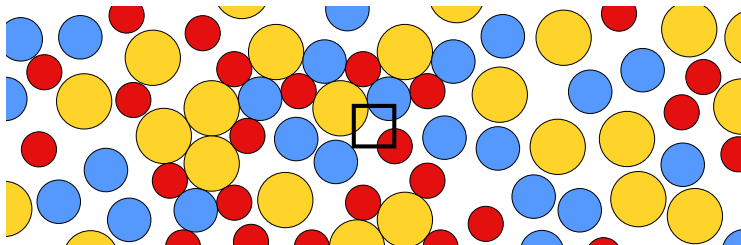


Définitions

Disques :



Arrangement P :
(dans \mathbb{R}^2)

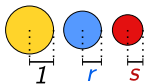


Densité :

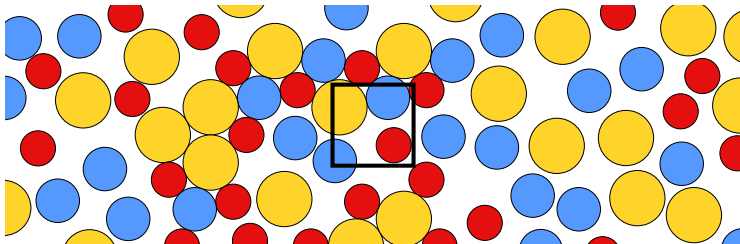
$$\delta \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{window} \\ \hline \end{array} \right) := \frac{\text{aire} \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{window} \\ \hline \end{array} \right)}{\text{aire} \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{window} \\ \hline \end{array} \right)}$$

Définitions

Disques :



Arrangement P :
(dans \mathbb{R}^2)

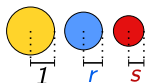


Densité :

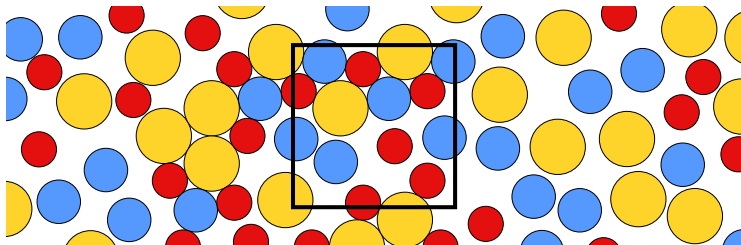
$$\delta \left(n \downarrow \blacksquare \cap P \right) := \frac{\text{aire} \left(n \downarrow \blacksquare \cap P \right)}{\text{aire} \left(n \downarrow \blacksquare \right)}$$

Définitions

Disques :



Arrangement P :
(dans \mathbb{R}^2)

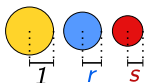


Densité :

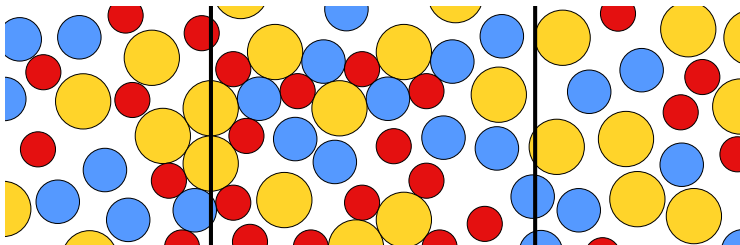
$$\delta \left(n \downarrow \begin{array}{c} \vec{n} \\ \blacksquare \end{array} \cap P \right) := \frac{\text{aire} \left(n \downarrow \begin{array}{c} \vec{n} \\ \blacksquare \end{array} \cap P \right)}{\text{aire} \left(n \downarrow \begin{array}{c} \vec{n} \\ \blacksquare \end{array} \right)}$$

Définitions

Disques :



Arrangement P :
(dans \mathbb{R}^2)

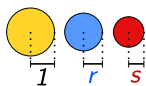


Densité :

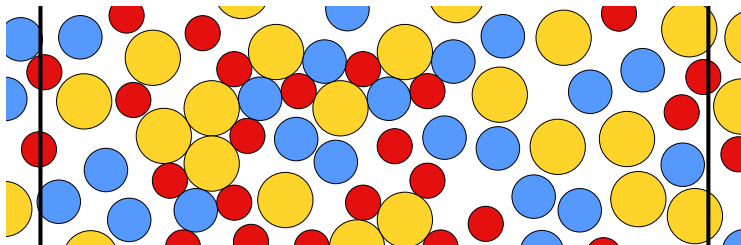
$$\delta \left(n \downarrow \begin{array}{c} \vec{n} \\ \blacksquare \end{array} \cap P \right) := \frac{\text{aire} \left(n \downarrow \begin{array}{c} \vec{n} \\ \blacksquare \end{array} \cap P \right)}{\text{aire} \left(n \downarrow \begin{array}{c} \vec{n} \\ \blacksquare \end{array} \right)}$$

Définitions

Disques :



Arrangement P :
(dans \mathbb{R}^2)

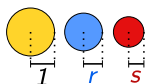


Densité :

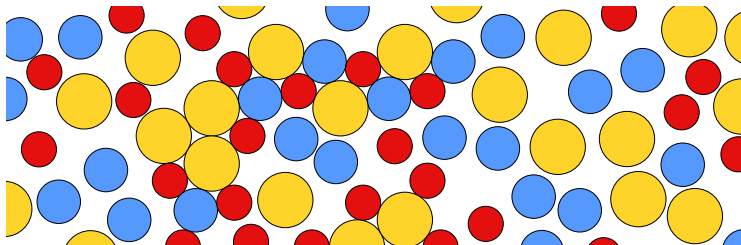
$$\delta \left(n \downarrow \begin{matrix} \vec{n} \\ \blacksquare \end{matrix} \cap P \right) := \frac{\text{aire} \left(n \downarrow \begin{matrix} \vec{n} \\ \blacksquare \end{matrix} \cap P \right)}{\text{aire} \left(n \downarrow \begin{matrix} \vec{n} \\ \blacksquare \end{matrix} \right)}$$

Définitions

Disques :



Arrangement P :
(dans \mathbb{R}^2)

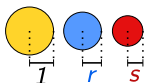


Densité :

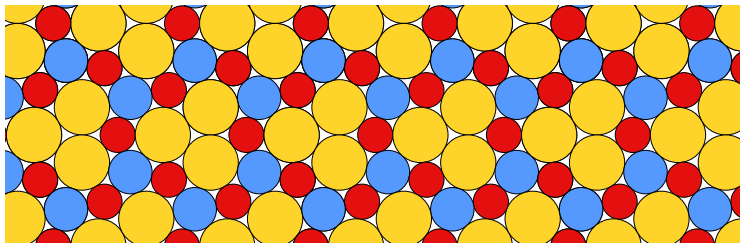
$$\delta(P) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{aire} \left(n \downarrow \overset{n}{\blacksquare} \cap P \right)}{\text{aire} \left(n \downarrow \overset{n}{\blacksquare} \right)}$$

Définitions

Disques :



Arrangement P :
(dans \mathbb{R}^2)



Densité :

$$\delta(P) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{aire} \left(n \downarrow \begin{array}{c} \overrightarrow{n} \\ \blacksquare \end{array} \cap P \right)}{\text{aire} \left(n \downarrow \begin{array}{c} \overrightarrow{n} \\ \blacksquare \end{array} \right)}$$

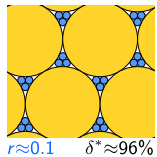
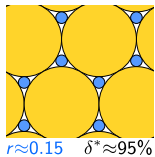
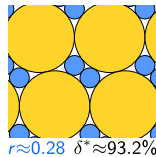
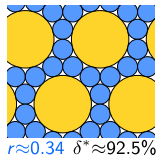
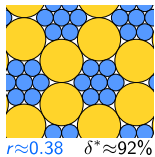
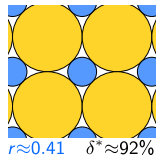
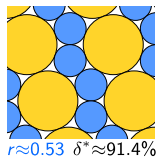
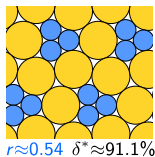
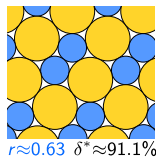
Question principale

Étant donné un ensemble fini de disques (par exemple, $\color{yellow}\bullet \color{blue}\bullet \color{red}\bullet$),
quelle est la densité maximale δ^* d'un arrangement ?

Arrangements à 2 disques optimaux

Théorème (Heppes 2000, 2003, Kennedy 2005, Bedaride et Fernique 2022)

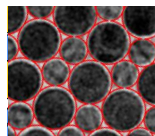
Chacun des arrangements suivants est optimal pour des disques de rayons 1 et r :



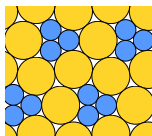
Arrangements à 2 disques optimaux

Théorème (Heppes 2000, 2003, Kennedy 2005, Bedaride et Fernique 2022)

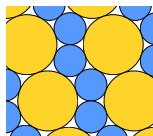
Chacun des arrangements suivants est optimal pour des disques de rayons 1 et r :



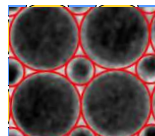
$r \approx 0.63$ $\delta^* \approx 91.1\%$



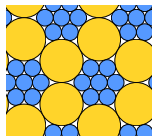
$r \approx 0.54$ $\delta^* \approx 91.1\%$



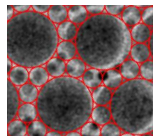
$r \approx 0.53$ $\delta^* \approx 91.4\%$



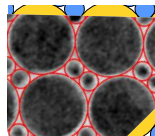
$r \approx 0.41$ $\delta^* \approx 92\%$



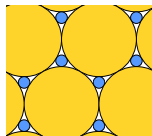
$r \approx 0.38$ $\delta^* \approx 92\%$



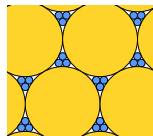
$r \approx 0.34$ $\delta^* \approx 92.5\%$



$r \approx 0.28$ $\delta^* \approx 93.2\%$



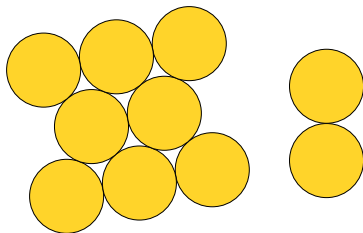
$r \approx 0.15$ $\delta^* \approx 95\%$



$r \approx 0.1$ $\delta^* \approx 96\%$

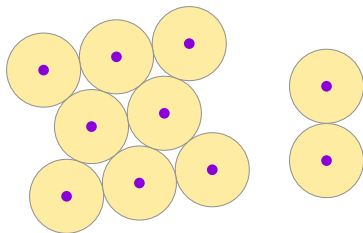
Arrangements triangulés

Graphe de contact :



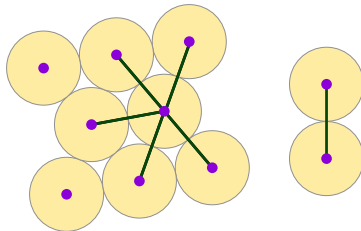
Arrangements triangulés

Graphe de contact : **sommets** = centres de disques



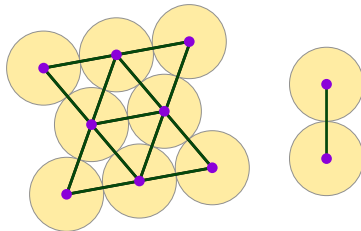
Arrangements triangulés

Grphe de contact : **sommets** = centres de disques, **arêtes** = paires de disques tangents



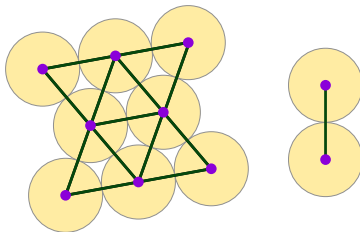
Arrangements triangulés

Grphe de contact : **sommets** = centres de disques, **arêtes** = paires de disques tangents

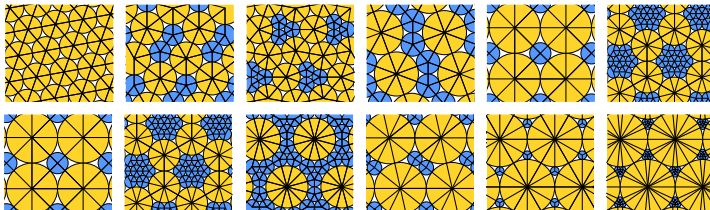


Arrangements triangulés

Grphe de contact : **sommets** = centres de disques, **arêtes** = paires de disques tangents



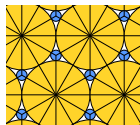
Un arrangement s'appelle **triangulé** si son graphe de contact est une triangulation :



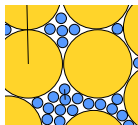
Conjecture de Connelly : triangulé saturé = optimal ?

Conjecture (Connelly 2018)

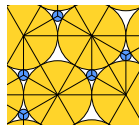
Si un ensemble de disques permet des arrangements triangulés **saturés**, l'un d'eux est optimal.



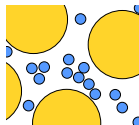
triangulé
saturé



non triangulé
saturé



triangulé
non saturé

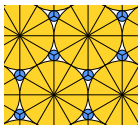


non triangulé
non saturé

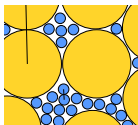
Conjecture de Connelly : triangulé saturé = optimal ?

Conjecture (Connelly 2018)

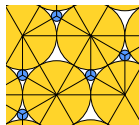
Si un ensemble de disques permet des arrangements triangulés **saturés**, l'un d'eux est optimal.



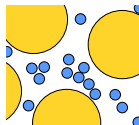
triangulé
saturé



non triangulé
saturé



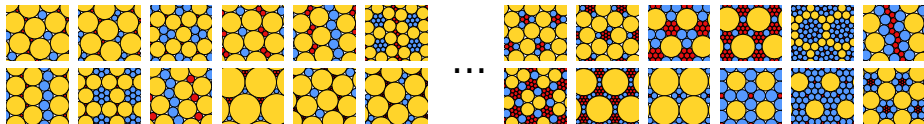
triangulé
non saturé



non triangulé
non saturé

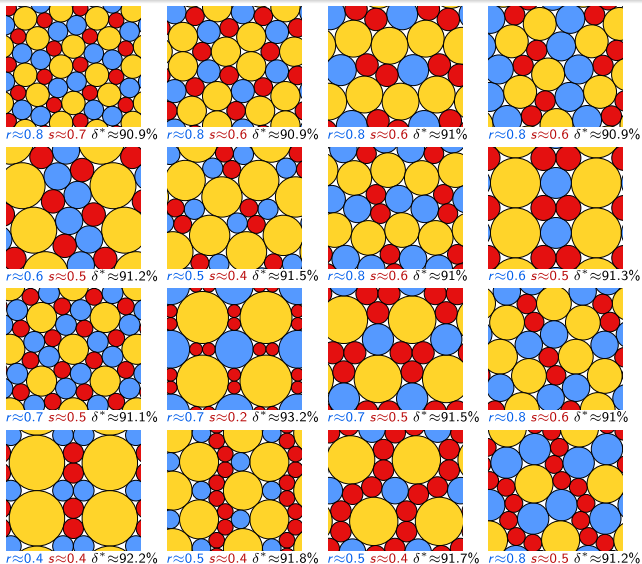
Théorème (○●● Fernique, Hashemi, Sizova 2019)

Disques de rayons $1, r, s$: il y a 164 paires (r, s) permettant des arrangements triangulés.



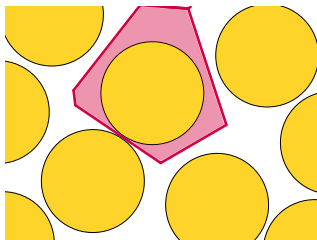
Théorème (Fernique, P 2023)

Chacun des 16 arrangements suivants est optimal pour des disques de rayons 1, r et s :

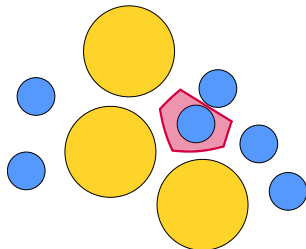


Triangulation d'un arrangement

Arrangement de disques
unitaires



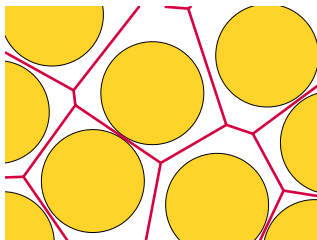
Arrangement de disques de
tailles multiples



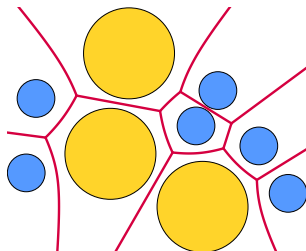
Cellule de Voronoi d'un disque dans un arrangement : ensemble des points plus proches de ce disque que de tout autre

Triangulation d'un arrangement

Arrangement de disques
unitaires



Arrangement de disques de
tailles multiples

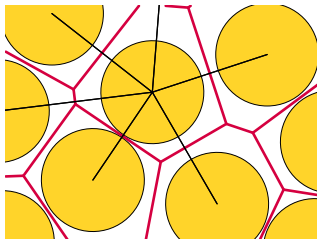


Cellule de Voronoi d'un disque dans un arrangement : ensemble des points plus proches de ce disque que de tout autre

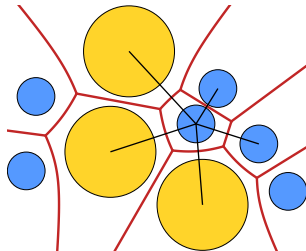
Diagramme de Voronoi d'un arrangement : partition du plan en cellules de Voronoi

Triangulation d'un arrangement

Arrangement de disques
unitaires



Arrangement de disques de
tailles multiples



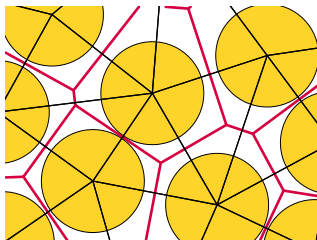
Cellule de Voronoi d'un disque dans un arrangement : ensemble des points plus proches de ce disque que de tout autre

Diagramme de Voronoi d'un arrangement : partition du plan en cellules de Voronoi

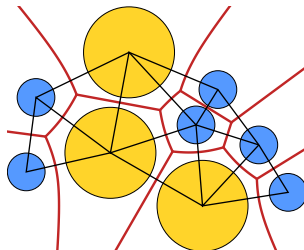
Triangulation d'un arrangement : graphe dual du diagramme de Voronoi

Triangulation d'un arrangement

Arrangement de disques
unitaires



Arrangement de disques de
tailles multiples



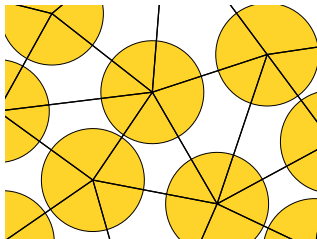
Cellule de Voronoi d'un disque dans un arrangement : ensemble des points plus proches de ce disque que de tout autre

Diagramme de Voronoi d'un arrangement : partition du plan en cellules de Voronoi

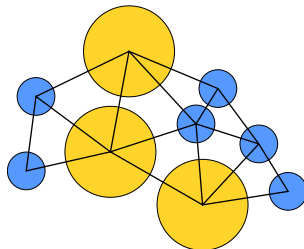
Triangulation d'un arrangement : graphe dual du diagramme de Voronoi

Triangulation d'un arrangement

Arrangement de disques
unitaires



Arrangement de disques de
tailles multiples



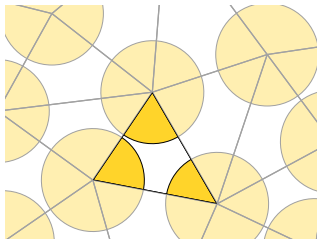
Cellule de Voronoi d'un disque dans un arrangement : ensemble des points plus proches de ce disque que de tout autre

Diagramme de Voronoi d'un arrangement : partition du plan en cellules de Voronoi

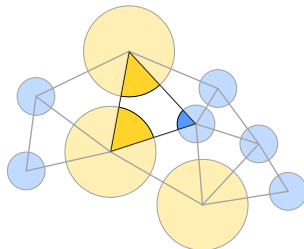
Triangulation d'un arrangement : graphe dual du diagramme de Voronoi

Triangulation d'un arrangement

Arrangement de disques unitaires



Arrangement de disques de tailles multiples



Cellule de Voronoi d'un disque dans un arrangement : ensemble des points plus proches de ce disque que de tout autre

Diagramme de Voronoi d'un arrangement : partition du plan en cellules de Voronoi

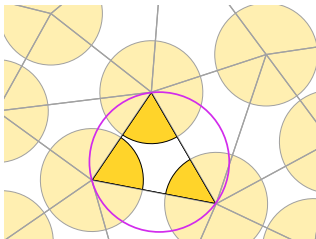
Triangulation d'un arrangement : graphe dual du diagramme de Voronoi

Densité d'un triangle Δ = sa proportion couverte par des disques

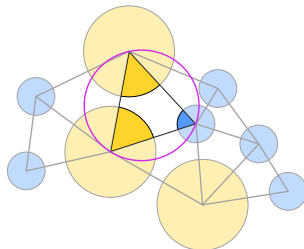
$$\delta_{\Delta} = \frac{\text{aire}(\Delta \cap P)}{\text{aire}(\Delta)}.$$

Triangulation d'un arrangement

Arrangement de disques unitaires



Arrangement de disques de tailles multiples



Cellule de Voronoi d'un disque dans un arrangement : ensemble des points plus proches de ce disque que de tout autre

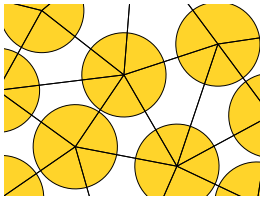
Diagramme de Voronoi d'un arrangement : partition du plan en cellules de Voronoi

Triangulation d'un arrangement : graphe dual du diagramme de Voronoi

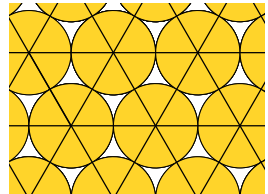
Densité d'un triangle Δ = sa proportion couverte par des disques

$$\delta_{\Delta} = \frac{\text{aire}(\Delta \cap P)}{\text{aire}(\Delta)}.$$

Redistribution locale de densité

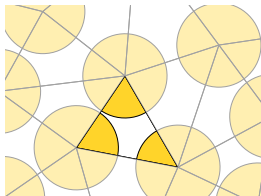


P de densité $\delta(P)$



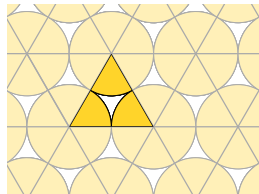
P^* de densité δ^*

Redistribution locale de densité



P de densité $\delta(P)$

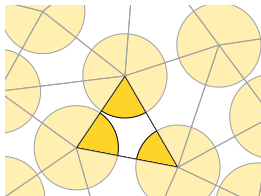
$$\forall \Delta, \delta(\Delta) \leq \delta(\triangle) = \delta^*$$



P^* de densité δ^*

$$\delta(\triangle) = \delta^*$$

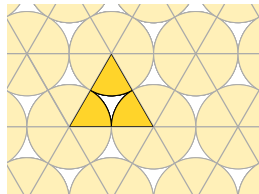
Redistribution locale de densité



P de densité $\delta(P)$

$$\forall \Delta, \delta(\Delta) \leq \delta(\triangle) = \delta^*$$

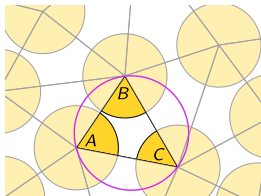
$$\delta(P) \leq \delta^*$$



P^* de densité δ^*

$$\delta(\triangle) = \delta^*$$

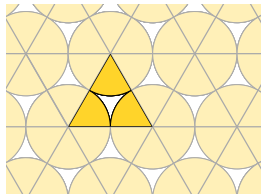
Redistribution locale de densité



P de densité $\delta(P)$

$$\forall \Delta, \delta(\Delta) \leq \delta(\triangle) = \delta^*$$

$$\delta(P) \leq \delta^*$$



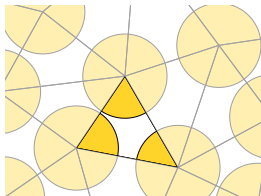
P^* de densité δ^*

$$\delta(\triangle) = \delta^*$$

Preuve :

- l'angle le plus petit de tout Δ est au moins $\frac{\pi}{6}$ $2 > R = \frac{|AB|}{2 \sin C} \geq \frac{1}{\sin C} \implies \hat{C} > \frac{\pi}{6}$
- donc l'angle le plus grand est compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$
- densité d'un triangle Δ : $\delta(\Delta) = \frac{\pi/2}{\text{area}(\Delta)}$
- l'aire d'un triangle ABC avec l'angle le plus grand \hat{A} : $\frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \hat{A}}{2} \geq \frac{2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3}$
- donc la densité de ABC est inférieure ou égale à $\frac{\pi/2}{\sqrt{3}} = \delta^*$

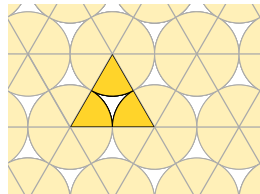
Redistribution locale de densité



P de densité $\delta(P)$

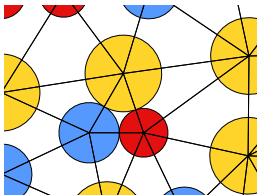
$$\forall \Delta, \delta(\Delta) \leq \delta(\triangle) = \delta^*$$

$$\delta(P) \leq \delta^*$$

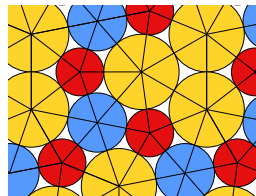


P^* de densité δ^*

$$\delta(\triangle) = \delta^*$$

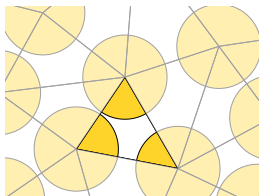


P de densité $\delta(P)$



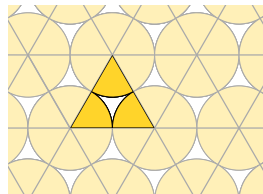
P^* de densité δ^*

Redistribution locale de densité



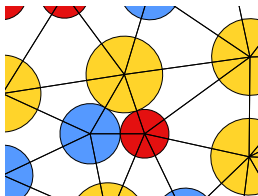
P de densité $\delta(P)$

$$\forall \Delta, \delta(\Delta) \leq \delta(\triangle) = \delta^*$$



P^* de densité δ^*

$$\delta(\triangle) = \delta^*$$

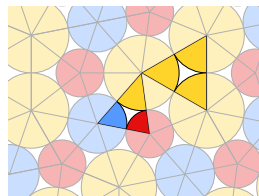


P de densité $\delta(P)$

Les triangles dans P^* ont des densités différentes:

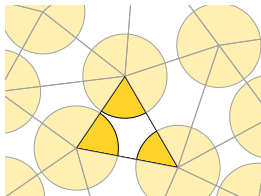
$$\delta(\triangle) < \delta^* < \delta(\triangle)$$

Il est impossible de borner la densité par δ^* dans chaque triangle...



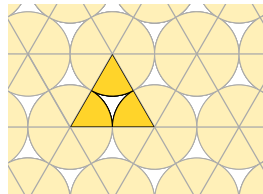
P^* de densité δ^*

Redistribution locale de densité



P de densité $\delta(P)$

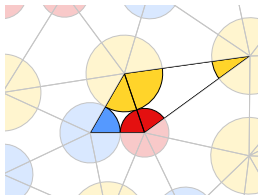
$$\forall \Delta, \delta(\Delta) \leq \delta(\triangle) = \delta^*$$



P^* de densité δ^*

$$\delta(\triangle) = \delta^*$$

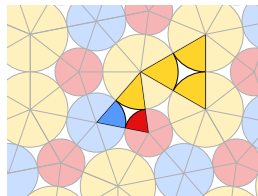
$$\delta(P) \leq \delta^*$$



P de densité $\delta(P) \leq \delta'(P)$

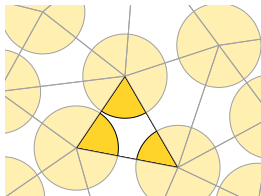
densité redistribuée δ' :

les triangles denses
partagent leur densité
avec leurs voisins



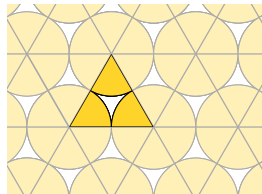
P^* de densité δ^*

Redistribution locale de densité



P de densité $\delta(P)$

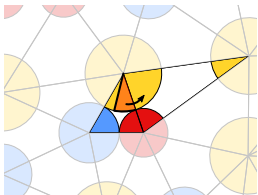
$$\forall \Delta, \delta(\Delta) \leq \delta(\triangle) = \delta^*$$



P^* de densité δ^*

$$\delta(\triangle) = \delta^*$$

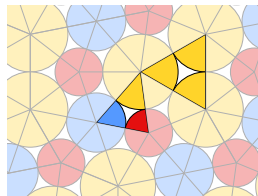
$$\delta(P) \leq \delta^*$$



P de densité $\delta(P) \leq \delta'(P)$

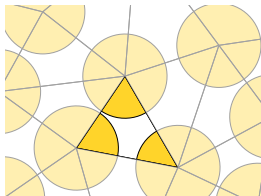
densité redistribuée δ' :

les triangles denses
partagent leur densité
avec leurs voisins



P^* de densité δ^*

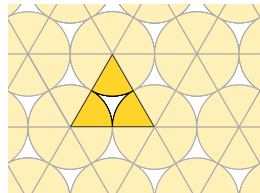
Redistribution locale de densité



P de densité $\delta(P)$

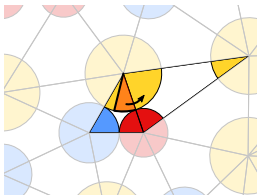
$$\forall \Delta, \delta(\Delta) \leq \delta(\triangle) = \delta^*$$

$$\delta(P) \leq \delta^*$$



P^* de densité δ^*

$$\delta(\triangle) = \delta^*$$



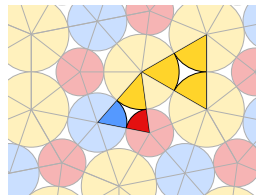
P de densité $\delta(P) \leq \delta'(P)$

$$\forall \Delta, \delta'(\Delta) \leq \delta^*$$

$$\delta(P) \leq \delta'(P) \leq \delta^*$$

densité redistribuée δ' :

les triangles denses
partagent leur densité
avec leurs voisins

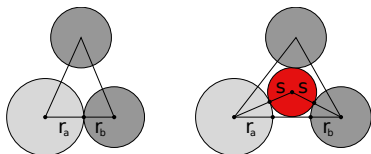


P^* de densité δ^*

Comment vérifier que $\delta'(\Delta) \leq \delta^*$ sur chaque triangle possible Δ ? (il y en a une infinité)

Comment vérifier que $\delta'(\Delta) \leq \delta^*$ sur chaque triangle possible Δ ? (il y en a une infinité)

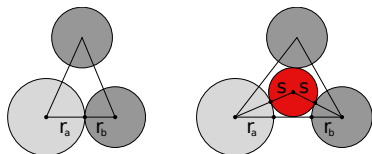
Propriétés de la triangulation + saturation \Rightarrow borne sur la longueur des arêtes



$$r_a + r_b \leq c \leq r_a + r_b + 2s$$

Comment vérifier que $\delta'(\Delta) \leq \delta^*$ sur chaque triangle possible Δ ? (il y en a une infinité)

Propriétés de la triangulation + saturation \Rightarrow borne sur la longueur des arêtes

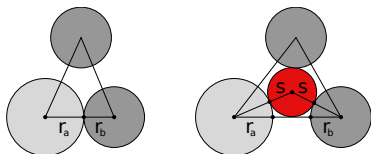


$$r_a + r_b \leq c \leq r_a + r_b + 2s$$

- **Arithmétique d'intervalles :**

Comment vérifier que $\delta'(\Delta) \leq \delta^*$ sur chaque triangle possible Δ ? (il y en a une infinité)

Propriétés de la triangulation + saturation \Rightarrow borne sur la longueur des arêtes



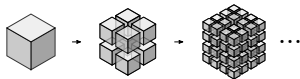
$$r_a + r_b \leq c \leq r_a + r_b + 2s$$

- Arithmétique d'intervalles :**

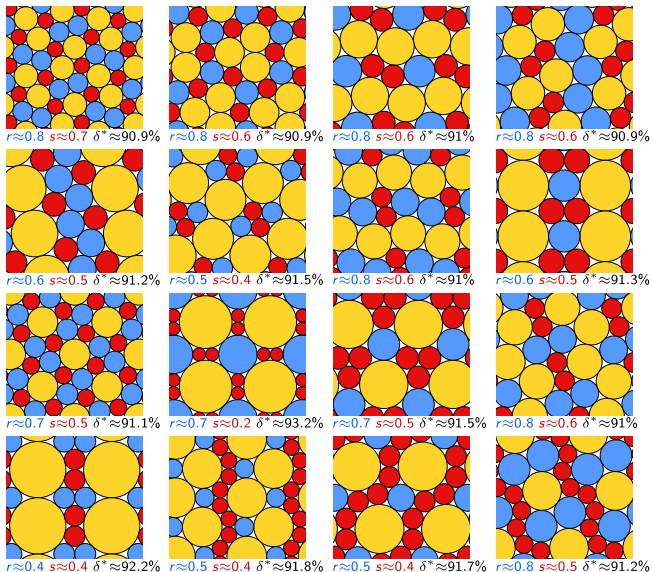
pour vérifier $\delta'(\Delta_{a,b,c}) \leq \delta^* \forall (a, b, c) \in [\underline{a}, \bar{a}] \times [\underline{b}, \bar{b}] \times [\underline{c}, \bar{c}]$,

nous vérifions $[\underline{\delta}, \bar{\delta}] \leq \delta^*$ où $[\underline{\delta}, \bar{\delta}] = \delta'(\Delta_{[\underline{a}, \bar{a}], [\underline{b}, \bar{b}], [\underline{c}, \bar{c}]})$

- Si $\delta^* \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]$, subdivision récursive :

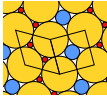


Notre preuve a fonctionné pour ces cas :

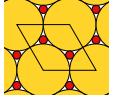


et pour les cas “mélangés” :

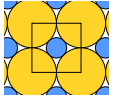
$$\delta^* \approx 93\%$$



$$\delta^* \approx 95\%$$

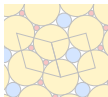


$$\delta^* \approx 92\%$$

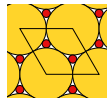


et pour les cas “mélangés” :

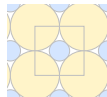
$$\delta^* \approx 93\%$$



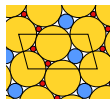
$$\delta^* \approx 95\%$$



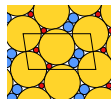
$$\delta^* \approx 92\%$$



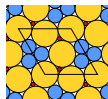
et pour les cas "mélangés" :



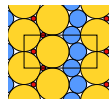
1



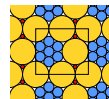
2



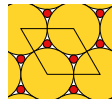
3



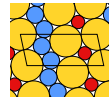
4



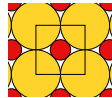
5



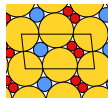
b_8



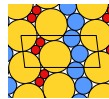
6



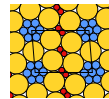
b_4



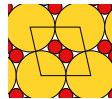
7



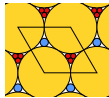
8



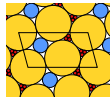
9



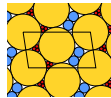
b_7



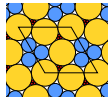
10



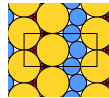
11



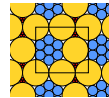
12



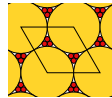
13



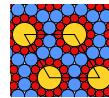
14



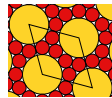
15



b_9



19

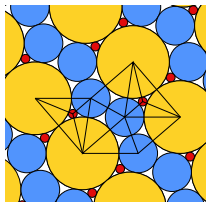


b_6

45 contre-exemples : méthode *flip-and-flow*

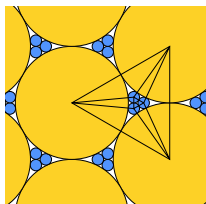
Lorsque le rapport entre deux disques est suffisamment proche de celui d'un arrangement triangulé à 2 disques, nous pouvons arranger ces disques de manière similaire (non triangulée) et obtenir encore une densité élevée

arrangement
triangulé à 3 disques



$$\delta \leq 0.931369 \quad s \approx 0.121445$$

arrangement
triangulé à 2 disques

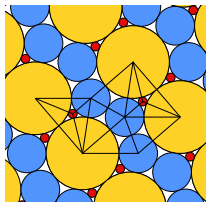


$$\delta \approx 0.962430 \quad r \approx 0.101021$$

45 contre-exemples : méthode *flip-and-flow*

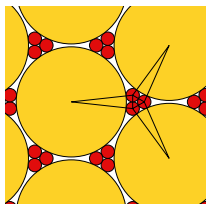
Lorsque le rapport entre deux disques est suffisamment proche de celui d'un arrangement triangulé à 2 disques, nous pouvons arranger ces disques de manière similaire (**non triangulée**) et obtenir encore une densité élevée

arrangement
triangulé à 3 disques



$$\delta \leq 0.931369 \quad s \approx 0.121445$$

arrangement dense
non triangulé

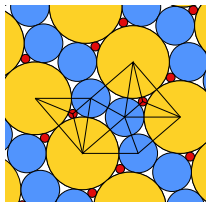


$$\delta \geq 0.937371 \quad s \approx 0.121445$$

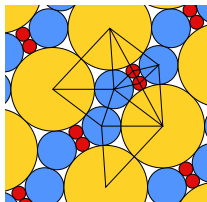
45 contre-exemples : méthode *flip-and-flow*

Lorsque le rapport entre deux disques est suffisamment proche de celui d'un arrangement triangulé à 2 disques, nous pouvons arranger ces disques de manière similaire (**non triangulée**) et obtenir encore une densité élevée

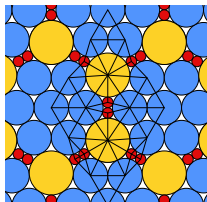
arrangement
triangulé à 3 disques



$$\delta \leq 0.931369 \quad s \approx 0.121445$$

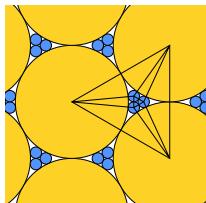


$$\delta \leq 0.924522 \quad s \approx 0.166169$$

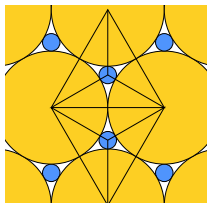


$$\delta \leq 0.917352 \quad s \approx 0.240205$$

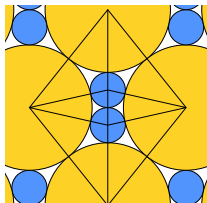
arrangement
triangulé à 2 disques



$$\delta \approx 0.962430 \quad r \approx 0.101021$$



$$\delta \approx 0.950308 \quad r \approx 0.154701$$

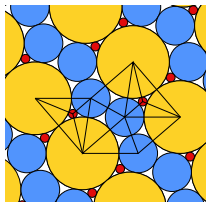


$$\delta \approx 0.931901 \quad r \approx 0.280776$$

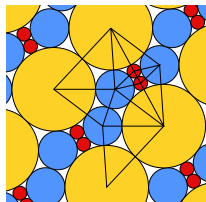
45 contre-exemples : méthode *flip-and-flow*

Lorsque le rapport entre deux disques est suffisamment proche de celui d'un arrangement triangulé à 2 disques, nous pouvons arranger ces disques de manière similaire (**non triangulée**) et obtenir encore une densité élevée

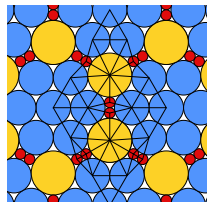
arrangement
triangulé à 3 disques



$$\delta \leq 0.931369 \quad s \approx 0.121445$$

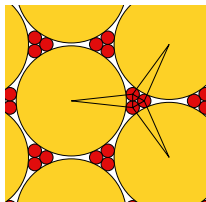


$$\delta \leq 0.924522 \quad s \approx 0.166169$$

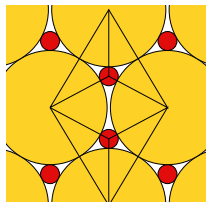


$$\delta \leq 0.917352 \quad s \approx 0.240205$$

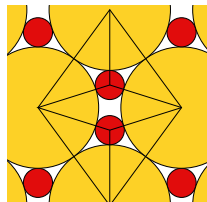
arrangement dense
non triangulé



$$\delta \geq 0.937371 \quad s \approx 0.121445$$



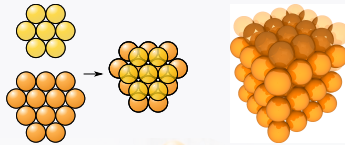
$$\delta \geq 0.939305 \quad s \approx 0.166169$$



$$\delta \geq 0.918420 \quad s \approx 0.240205$$

Conjecture de Kepler : empilements d'oranges

Empilement cubique centré :

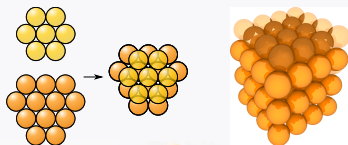


$$\delta^* = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74\%$$



Conjecture de Kepler : empilements d'oranges

Empilement cubique centré :



$$\delta^* = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74\%$$

Théorème (démonstré par Hales, Ferguson, 1998–2014

conjecturé par Kepler, 1611)

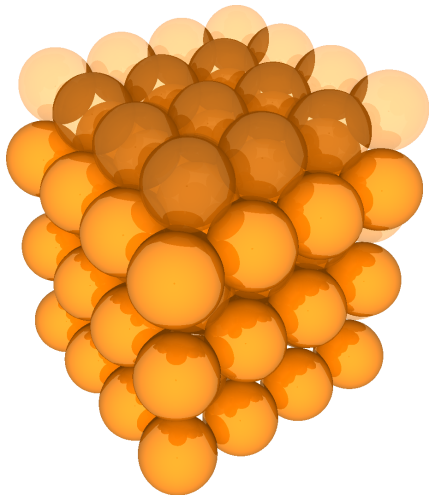
L'empilement cubique centré est optimal.

- cet empilement est optimal parmi les empilements régulières Gauss 1831
- 18ème problème de la liste de Hilbert 1900
- 6 prépublications (250 pages) par Hales et Ferguson ArXiv 1998
> 50000 + 137000 lignes de code
- comité de lecture : 13 relecteurs, 4 ans... "99% de certitude" 1999–2003
- version courte de la preuve Annals of Mathematics 2005
- version complète : 6 articles édités DCG 2006
- Projet Flyspeck : preuve formelle vérifiée par ordinateur 2003–2014
Forum of Mathematics, Pi 2017

sphère



empilement cubique centré



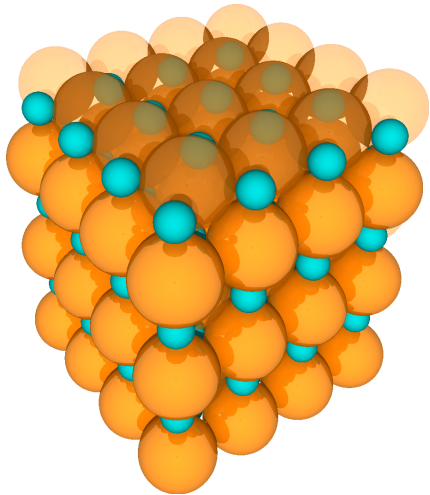
Empilement de sel

sphères de sel



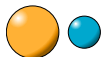
$$1 \quad r = \sqrt{2} - 1$$

empilement de sel



Empilement de sel

sphères de sel



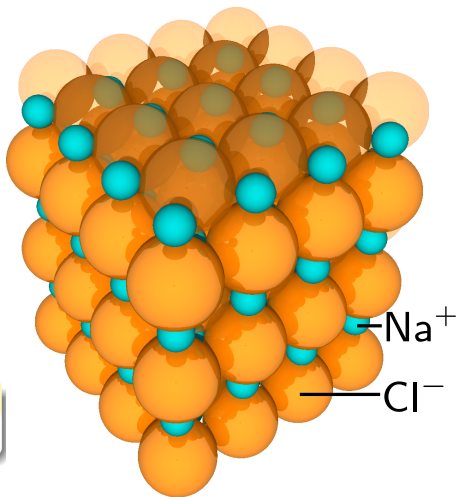
$$1 \quad r = \sqrt{2} - 1$$

triangulé \rightarrow tétraédrique
 le graphe de contact est une "tétraédrisation"

Conjecture du sel **problème ouvert**

L'empilement de sel est optimal $\delta^* \approx 79\%$

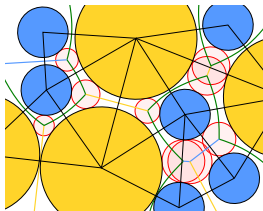
empilement de sel



Pourquoi les calculs sont-ils si lents ?

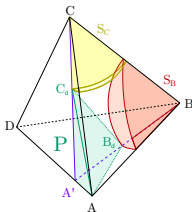
arithmétique d'intervalles + formules énormes \rightarrow perte de précision

Techniques

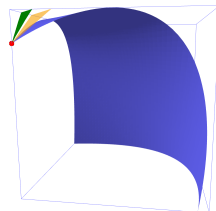


propriétés des triangulations

Géométrie :

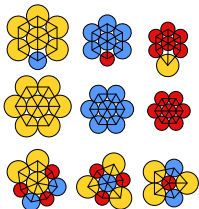


... et "tétraédrisations"



géométrie différentielle

Assistance informatique :



analyse de cas
Python, C++

$$A_{1111} = 4(d^2 - e^2)^2 + 4f^4 + ((d^2 - 8)e^2 - 8d^2)f^2$$

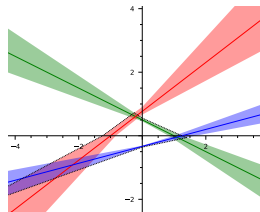
$$B_{1111} = 8(d^2 - e^2)^2 + 8f^4 + 2((d^2 - 8)e^2 - 8d^2)f^2$$

$$C_{1111} = d^2 e^2 f^2$$

$$8 \left(\begin{array}{l} \arctan \left(\frac{\sqrt{-4(d^2 - e^2)^2 - 4f^4 - ((d^2 - 8)e^2 - 8d^2)f^2}}{(d+2)e^2 + 2d^2 + (d^2 + 4d)e^2 - 2f^2} \right) \\ + \arctan \left(\frac{\sqrt{-4(d^2 - e^2)^2 - 4f^4 - ((d^2 - 8)e^2 - 8d^2)f^2}}{(d+2)f^2 + 2d^2 - 2e^2 + (d^2 + 4d)f} \right) \\ + \arctan \left(\frac{\sqrt{-4(d^2 - e^2)^2 - 4f^4 - ((d^2 - 8)e^2 - 8d^2)f^2}}{(e+2)f^2 - 2d^2 + 2e^2 + (e^2 + 4e)f} \right) \\ - \arctan \left(\frac{\sqrt{-4(d^2 - e^2)^2 - 4f^4 - ((d^2 - 8)e^2 - 8d^2)f^2}}{2(d^2 + e^2 + f^2 - 3d)} \right) \end{array} \right)$$

$$\delta_{1111} = \frac{\dots}{\sqrt{-4(d^2 - e^2)^2 - 4f^4 - ((d^2 - 8)e^2 - 8d^2)f^2}}$$

calcul symbolique
SageMath

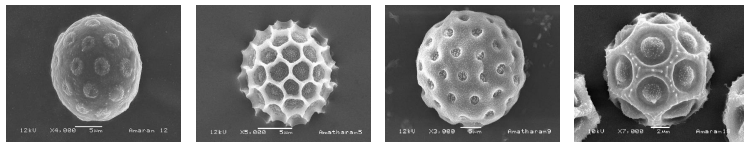


arithmétique d'intervalles
MPFI (RIF SageMath)
Boost (C++)



Autres questions "sphériques" : des grains de pollen ...

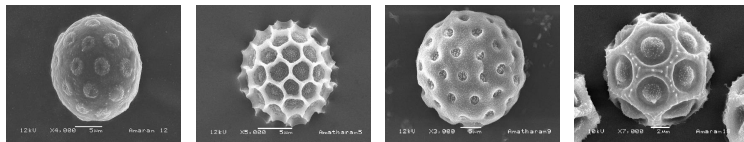
Tammes 1930 : configuration des pores sur un grain de pollen



maximiser le nombre de calottes sphériques d'un rayon donné sur une sphère

Autres questions "sphériques" : des grains de pollen ...

Tammes 1930 : configuration des pores sur un grain de pollen



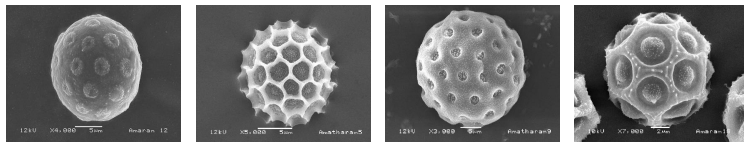
maximiser le nombre de calottes sphériques d'un rayon donné sur une sphère

=

placer n points sur une sphère pour maximiser la distance entre deux points les plus proches

Autres questions "sphériques" : des grains de pollen ...

Tammes 1930 : configuration des pores sur un grain de pollen



maximiser le nombre de calottes sphériques d'un rayon donné sur une sphère

=

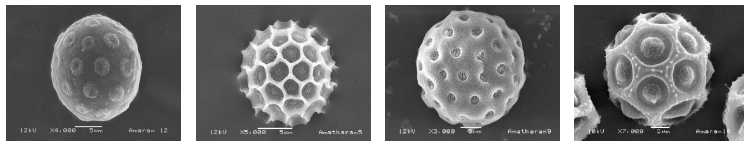
placer n points sur une sphère pour maximiser la distance entre deux points les plus proches

=

trouver le plus petit rayon possible d'une sphère centrale tangente à n sphères unitaires

Autres questions "sphériques" : des grains de pollen ...

Tammes 1930 : configuration des pores sur un grain de pollen



maximiser le nombre de calottes sphériques d'un rayon donné sur une sphère

=

placer n points sur une sphère pour maximiser la distance entre deux points les plus proches

=

trouver le plus petit rayon possible d'une sphère centrale tangente à n sphères unitaires

résolu pour $n = 3, \dots, 14$, et 24 (1943 – 2015) :



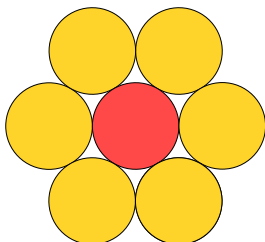
... au nombre de contact

nombre de contact : combien de sphères unitaires peuvent toucher la même sphère centrale unitaire dans \mathbb{R}^d

... au nombre de contact

nombre de contact : combien de sphères unitaires peuvent toucher la même sphère centrale unitaire dans \mathbb{R}^d

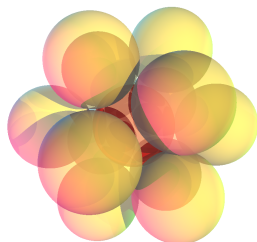
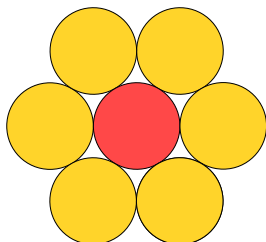
résolu pour $d=2$: 6, $d=3$:



... au nombre de contact

nombre de contact : combien de sphères unitaires peuvent toucher la même sphère centrale unitaire dans \mathbb{R}^d

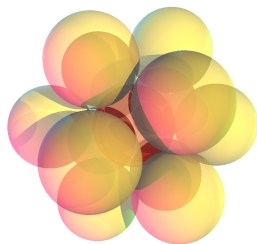
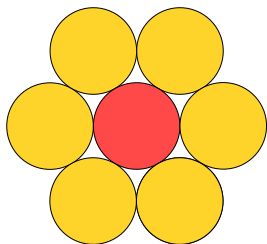
résolu pour $d=2$: 6, $d=3$:



... au nombre de contact

nombre de contact : combien de sphères unitaires peuvent toucher la même sphère centrale unitaire dans \mathbb{R}^d

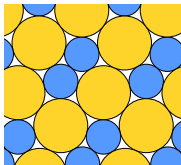
résolu pour $d=2$: 6, $d=3$: 12 (1953), $d=4$: 24 (2003), $d=8$: 240, $d=24$: 196560 (1979)



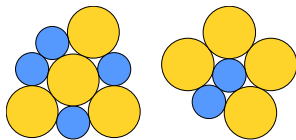
Merci pour votre attention !

Comment trouver des empilements triangulés

un empilement est triangulé



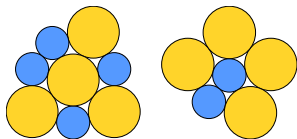
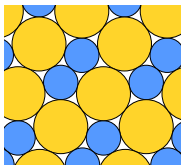
chaque disque a une "couronne"



un empilement est triangulé



chaque disque a une "couronne"



Pour trouver les tailles de disques avec des empilements triangulés, nous parcourons toutes les combinaisons possibles de couronnes symboliques de deux disques (nombre fini) :

couronne symbolique

$$\begin{array}{ccc} & r & 1 \\ r & & 1 \\ & 1 & r \\ 1 & & 1 \\ & r & & 1 \end{array}$$

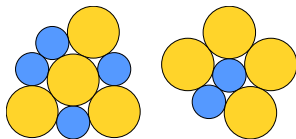
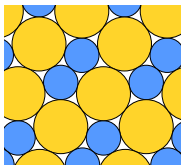
(Fernique, Hashemi, Sizova 2019)

Comment trouver des empilements triangulés

un empilement est triangulé

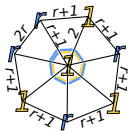
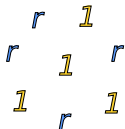


chaque disque a une "couronne"



Pour trouver les tailles de disques avec des empilements triangulés, nous parcourons toutes les combinaisons possibles de couronnes symboliques de deux disques (nombre fini) :

couronne symbolique



valeur de r

$$6 \times \widehat{11r} + 1 \times \widehat{r1r} = 2\pi$$

$$r \approx 0.63$$

(Fernique, Hashemi, Sizova 2019)