Théorème de Gödel : quand les mathématiques rencontrent l'incertitude.

Modèles et théories

Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? Tout le monde a une idée de ce qu'est un cercle, ou un nombre, mais ces objets ne se rencontrent pas dans le monde réel : ce sont des constructions de l'esprit humain. Parfois, ces constructions sont inspirées par la réalité (on peut facilement se représenter une sphère en observant une bulle de savon), mais la porte reste ouverte à l'imagination.
On appellera ces objets des **modèles**. Plus précisément, un modèle sera constitué d'un ensemble (fini ou infini) d'objets, ainsi que de relations entre ces objets, comme par exemple l'ensemble des entiers naturels munis de la relation « plus petit que ». De la même manière que les biologistes étudient les organismes vivants, les modèles sont les sujets d'études de la science mathématique.

Comment réussir à progresser dans la connaissance de ces modèles ? Puisque ce sont des constructions de l'esprit, on est tenté de faire des déductions purement logiques. Par exemple prenons le modèle des entiers naturels ordonnés : $0 \leq 1 \leq 2 \leq$etc. Si l'on sait que 0 est le plus petit entier naturel, alors on peut en déduire qu'il est plus petit que 5.
Mais ce type de raisonnement suppose toujours quelque chose de déjà connu. Quelles déductions pourrait-on faire, si au départ on ne sait rien ?
Il nous faut donc partir d'une base de connaissance : les **axiomes**. Ils sont un ensemble d'énoncés sur notre modèle que nous admettons sans démonstration. Ce sont souvent des énoncés qui nous semblent évidents dans le modèle que l'on veut étudier. Cependant, évidents ou non, nous sommes obligés de les admettre sans preuve pour qu'ils servent de base à des déductions.[1]

Un ensemble d'axiomes s'appelle une **théorie**. Par exemple, la géométrie euclidienne que l'on apprend au collège/lycée est une théorie permettant de prouver des théorèmes sur le modèle du plan euclidien contenant des points, droites, cercles, triangles, etc.
L'un des axiomes de cette théorie est « Etant donnés 2 points A et B, il existe toujours une unique droite passant par A et B ».
On peut voir une théorie comme une description du modèle que l'on veut étudier, au moyen d'axiomes.
On dit qu'une théorie **admet** un modèle M si tous les axiomes de la théorie sont vrais dans M. Les théorèmes obtenus par déduction le seront aussi, si le système de déduction est raisonnable[2](on ne s'attardera pas sur ce point ici). Une **démonstration** (ou **preuve**) d'un énoncé P est une suite de déductions se basant sur les axiomes et aboutissant à la conclusion que est vrai.
Parfois, on utilisera le mot « théorie » pour désigner non seulement les axiomes, mais aussi tous les théorèmes qui en découlent. En effet, choisir les axiomes fixe instantanément l'ensemble des théorèmes : les conséquences logiques des axiomes ne dépendent pas du fait qu'on trouve une démonstration ou pas !

Imaginez que vous deviez décrire votre chambre dans un petit texte. Celui qui le lira pourra

1 Pour reprendre l'exemple ci-dessus, si on dispose de l'axiome « pour tout entier x, on a $0 \leq x$ », alors il suffit d'appliquer notre axiome avec $x=5$ pour en déduire $0 \leq 5$.

2 Le système de déduction que l'on considère dans tout l'article s'appelle « calcul des prédicats classique du premier ordre »

répondre à certaines questions qu'on lui posera (« où est le lit ? », « de quelle couleur est la lampe de bureau ? »).
Le but d'une théorie est le même : décrire un modèle au moyen d'axiomes, de manière à ce que l'on puisse reconstruire ses propriétés par déduction. Le modèle mathématique correspond donc à la chambre, et la théorie à la description que vous en faites.
Par exemple si vous dites dans votre description « Tous les objets électriques de ma chambre sont blancs » et « J'ai une radio», on peut démontrer l'énoncé « Il y a une radio blanche», en utilisant les deux axiomes et un raisonnement déductif.

Attention, plusieurs théories sont possibles pour un même modèle (il existe plusieurs manières de décrire la même chambre). C'est au mathématicien de choisir sa théorie, de manière à ce qu'elle décrive le mieux possible le modèle qu'il veut étudier.

Les qualités d’une bonne théorie

Toutes les théories ne se valent pas : elles peuvent décrire plus ou moins bien le modèle, ou même être complètement absurdes. Elles peuvent aussi être trop compliquées à écrire pour être utilisables en pratique.

Point de vue mathématique

On dit qu'une théorie est **complète** si elle permet de répondre à n'importe quelle question que l'on peut poser. Par exemple si votre chambre est vide, ce ne sera pas difficile de la décrire complètement.
Notons qu'on va se restreindre ici aux questions dont la réponse est « oui » ou « non », c'est-à-dire des énoncés qui sont soit vrais, soit faux dans le modèle.
Cela signifie que dans une théorie complète, pour tout énoncé P, on peut toujours trancher sur la véracité de P. Autrement dit, on peut toujours démontrer soit que P est vraie, soit que P est fausse.
Dans le cas contraire, la théorie est **incomplète** : vous avez pu oublier de dire s'il y a une fenêtre. Un lecteur de votre description ne pourra ni affirmer qu'il y a une fenêtre, ni affirmer qu'il n'y en a pas. Une théorie incomplète est une théorie dans laquelle il existe des énoncé P tels que ni P, ni son contraire ne peuvent être démontrés. Un tel énoncé P est alors dit **indécidable** dans la théorie (ou **indépendant** des axiomes de la théorie).
Dans ce cas, nous sommes sûrs que plusieurs modèles différents peuvent correspondre à notre théorie. En effet, si la description d'une chambre ne se prononce pas sur la présence d'une fenêtre, alors elle pourrait représenter une chambre sans fenêtre, mais aussi une chambre avec fenêtre

De plus, la théorie est **cohérente** si ses théorèmes ne se contredisent pas entre eux. Par exemple, vous ne pouvez pas déclarer que toute votre chambre est blanche, puis affirmer ensuite que le plafond est rouge.
Une théorie incohérente n'a aucune valeur mathématique[3] : si elle permet de démontrer un énoncé et son contraire, alors elle ne peut décrire aucun modèle, car dans un modèle chaque énoncé est soit vrai soit faux.
Pour cette raison, si une théorie admet un modèle, alors elle est forcément cohérente. La réciproque est également vraie (mais c'est un résultat difficile) : si une théorie est cohérente, alors elle admet un modèle.[4]
Bien sûr, l'idéal est d'avoir une théorie à la fois cohérente et complète. Ainsi, l'on connaitra aussi parfaitement que possible notre modèle, via quelques déductions logiques.

---

3 C'est vrai dans le cadre de la logique classique dans laquelle on se place ici. D'autres logiques, dites paraconsistantes, tolèrent l'incohérence.
4 C'est le théorème de complétude, obtenu par Kurt Gödel.

Point de vue pratique
Pour l'instant, nous n'avons imposé aucune restriction sur l'ensemble d'axiomes. A priori, il pourrait donc être infini, et très compliqué. Rien ne nous empêche même de déclarer « je prends comme axiome tout ce qui est vrai dans mon modèle ». Ceci nous permettrait d'obtenir facilement une théorie cohérente et complète : dans le modèle chaque énoncé est soit vrai, soit faux.
Cependant, cela ne nous avance pas beaucoup en pratique, car nous ne savons même pas reconnaître les axiomes de notre théorie.

On pourrait se restreindre à un nombre fini d'axiomes, mais il se trouve que ceci nous limiterait un peu trop. On veut parfois avoir une infinité d'axiomes pour définir certaines notions, comme la récurrence sur les nombres entiers par exemple. Cependant, dans cet exemple, il nous est facile de reconnaître nos axiomes, car ils sont tous définis selon le même schéma[5]. Il est donc parfois raisonnable en pratique d'utiliser une infinité d'axiomes.

Où placer la limite entre les théories « raisonnables » et celles qui ne le sont pas ? La réponse est déjà esquissée plus haut : on veut être capable de reconnaître les axiomes de notre théorie. Formellement, cela veut dire qu'il existe un algorithme (par exemple un programme d'ordinateur), qui nous demande un énoncé, et nous répond « oui » si cet énoncé est un axiome et « non » sinon. Dans la métaphore de la maison, cela correspond à limiter la description à un nombre fini de mots. La subtilité étant que ces mots ne décrivent pas directement les axiomes, mais le programme capable de les reconnaître (qui doit, lui, être fini).

Une théorie qui possède un ensemble d'axiomes reconnaissable par algorithme est appelée **récursivement énumérable** (abrégé RE).
Dans la suite on se limite à de telles théories, car elles sont les seules utilisables en pratique.

Cette notion possède un intérêt supplémentaire. Si T est une théorie RE et complète, alors on peut montrer qu'il existe un programme qui reconnaît les théorèmes de T (et non plus seulement les axiomes). Cela signifie que si l'on veut savoir si un énoncé est un théorème de T, pas la peine de réfléchir à une démonstration, un ordinateur peut faire le travail à notre place. La théorie est alors dite **récursive**.

Théorème d'incomplétude

Pendant un temps, l'un des buts affichés des mathématiciens a été de trouver une théorie complète et récursive, qui permettrait de décrire complètement l'ensemble des objets mathématiques couramment étudiés, et d'avoir en plus un procédé mécanique permettant de trancher sur la véracité de tout énoncé.

En 1931, Kurt Gödel mit fin à de tels espoirs, en publiant son fameux **Théorème d'incomplétude**.
Dans les grandes lignes, ce théorème affirme que toute théorie RE, cohérente et « suffisamment compliquée » est nécessairement incomplète.

L'exemple de la chambre vide a montré pourquoi il ne faut pas que le modèle décrit soit trop

5 Pour chaque formule f(x) (par exemple $x<x+3$), il nous faut un axiome « si f(0) est vrai, et pour tout $n\geq 0$, f(n) implique f(n+1), alors pour tout $n\geq 0$, f(n) est vrai ». On ne peut pas les regrouper en un seul axiome car on a le droit d'écrire « pour tout nombre » mais pas « pour toute formule », dans le système que l'on s'est fixé (calcul des prédicats classiques du premier ordre).

simple. Plus précisément, « suffisamment compliquée » signifie ici que la théorie doit être capable de parler des nombres entiers, avec les notions d'addition et de multiplication. C'est donc plutôt raisonnable, et les mathématiques de tous les jours sont directement concernées.

La démonstration par le codage de Gödel

L'idée qui se trouve au coeur de la démonstration de Gödel est élégante et novatrice. Il a remarqué qu'une fois la théorie fixée, tout énoncé mathématique et même toute démonstration peut se coder de façon systématique par un simple nombre entier. Par exemple on pourra utiliser le nombre 153 pour coder l'énoncé « la somme de deux nombres impairs est toujours paire », et le nombre 19765 pour coder une démonstration de cet énoncé. Gödel décrit précisément comment passer des énoncés aux codes et vice-versa, mais nous n'entrerons pas dans ces détails ici.
Il parvient ensuite à jouer avec ces codes pour créer un énoncé G qui affirme « G n'est pas démontrable », en parlant de son propre code. Si l'on pouvait démontrer G, on tomberait sur une contradiction, puisqu'il affirme justement que c'est impossible. Et comme le contraire de G est « G est démontrable », on ne peut pas non plus le montrer ! Du coup la théorie est forcément incomplète : ni G, ni son contraire ne peuvent être démontrés.
Cette astuce rappelle les phrases paradoxales comme « cette phrase est fausse ». Le procédé est cependant un petit peu plus subtil ici : G parle de son code et non directement d'elle-même, comme si vous parliez de votre numéro de sécurité sociale.

Ce codage systématique par des nombres entiers pose les bases de l'informatique. Aujourd'hui cette idée a fait du chemin : nos textes, nos images, nos musiques, sont enregistrés sur nos disques durs sous forme de code binaire, c'est-à-dire de simples nombres écrits en base 2. Bien avant l'invention de l'ordinateur, Gödel fut l'un des premiers à imaginer un codage universel, et ce pour montrer un théorème de logique pure ! Par la suite, il a d'ailleurs travaillé activement avec d'autre pères de l'informatique comme Alan Turing, Alonzo Church et John Von Neumann.

Discussion sur le Théorème

On pourrait dire que si l'on tombe sur un énoncé indécidable, il suffit de la rajouter en axiome pour compléter la théorie. Cependant le raisonnement de Gödel s'applique aussi dans cette nouvelle théorie où l'on peut construire, de la même manière, un énoncé indécidable (différent du précédent).

A l'époque, les réactions de la communauté ont été plutôt négatives. Ce résultat a d'abord été perçu comme une remise en question de la toute-puissance mathématique.
Cependant, certains mathématiciens, à commencer par Gödel lui-même, ont vu dans ce résultat une preuve de « l'inépuisabilité » des mathématiques : puisque chaque ensemble d'axiomes génère ses propres énoncés indécidables, il existera toujours la possibilité d'enrichir nos théories. La recherche mathématique serait alors sans fin et n'aurait pour seule limite que celle de l'inventivité des mathématiciens.

Ce théorème a eu un tel retentissement qu'il a parfois été interprété dans d'autres domaines comme un résultat général d'impossibilité scientifique ou philosophique, voire une limitation intrinsèque et démontrée de la connaissance humaine[6]. Cependant, gardons bien à l'esprit que, d'une part, ce résultat est un théorème de logique mathématique qui ne doit pas être sorti de son

6 De tels abus sont dénoncés dans « Impostures intellectuelles » de Sokal et Bricmont. Par exemple Régis Debray prétend déduire du théorème de Gödel le fait qu'une société sans croyances religieuses est impossible !

contexte. Les hypothèses et les conclusions sont très précises et ne s'appliquent tout simplement pas à d'autres systèmes que des systèmes formels. D'autre part, l'incomplétude démontrée par Gödel est toujours *relative* à une théorie. Un énoncé indécidable dans une théorie peut parfaitement l'être dans une autre (qui aura, bien entendu, elle aussi ses propres énoncés indécidables).

En revanche, le théorème de Gödel conduit à se poser des questions philosophiques légitimes sur le statut des modèles que l'on veut étudier. Peut-on vraiment parler sans ambiguité des propriétés des nombres entiers, comme si ces nombres existaient dans la nature, alors que nous n'arrivons pas à les axiomatiser complètement ? Les questions de ce genre sont loin d'être tranchées, et divisent la communauté mathématique en différentes écoles de pensée.

Implications en mathématiques

Ce théorème a mis fin a la quête d'une axiomatisation complète des mathématiques, et de l'arithmétique en particulier. Nous pouvons donc dire adieu à notre programme informatique qui répondrait à toutes les questions mathématiques. C'est d'ailleurs une bonne nouvelle pour les mathématiciens, car un tel programme aurait signé la fin de leur profession.

Sur l'arithmétique en particulier, l'espoir d'avoir une théorie RE complète semblait raisonnable, et l'on disposait de candidats sérieux. Grâce au théorème de Gödel, on sait maintenant que certains énoncés résistant aux assauts des chercheurs depuis longtemps ont une chance d'être indécidables. Un exemple parmi d'autres : la conjecture de Goldbach affirme que tout nombre pair à partir de 4 est la somme de deux nombres premiers (un nombre est premier s'il a exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même). Par exemple 6=3+3, 16=11+5, 20=17+3, etc... Des milliards de nombres ont été testés par ordinateur, mais la preuve générale attend toujours d'être trouvée, si jamais elle existe !

Il est à noter que des résultats d'indécidabilité avaient été montrés avant le théorème de Gödel (sur la géométrie d'Euclide par exemple), et d'autres ont été obtenus depuis sans y avoir recours (l'un des plus célèbres concerne les différentes tailles possibles d'ensembles infinis). Ce théorème peut être vu comme une manière de générer *automatiquement* un énoncé indécidable d'un certain genre, mais ne capture pas tous les énoncés indécidables.

Finalement, comme il a été mentionné plus haut, le théorème de Gödel a été l'un des points de départ de l'informatique. En particulier, Kurt Gödel a initié avec (entre autres) Alan Turing et Alonzo Church la théorie de la calculabilité, qui trace les limites entre ce qu'un ordinateur peut faire et ce qui lui est impossible. Les termes « récursif » et « récursivement énumérable » sont d'ailleurs empruntés à cette théorie, et le théorème de Gödel (considéré avec le recul nécessaire) est l'un des premiers énoncés où ces notions sont utilisées de manière formelle.

RÉFÉRENCES

K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I.* (« *Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés* ») Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (received 17 novembre 1930, published 1931)

Ernest Nagel, James R. Newman, Kurt Gödel, Jean-Yves Girard, « *Le théorème de Gödel* »

Editions du Seuil (1997)

Alan Sokal et Jean Bricmont, « *Impostures Intellectuelles* ». Éditions Odile Jacob, 1997

J. Bouveresse *Prodiges et vertiges de l'analogie. De l'abus des belles-lettres dans la pensée*, Raisons d'Agir, 1999

Apostolos Doxiadis, Christos H. *Papadimitriou*, Alecos Papadatos, Annie Di Donna, "*Logicomix*", *Vuibert* 2010

Blanché et Dubucs, « *La logique et son histoire* », Armand Colin

Raymond Smullyan, « *Les théorèmes d'incomplétude* », Dunod

Articles Wikipédia : Kurt Gödel, théorème d'incomplétude, théorème de complétude.