

Autour du Théorème de RAMSEY

La préoccupation principale de la **théorie de RAMSEY** est l'apparition d'ordre dans les structures mathématiques. Plus précisément, elle s'intéresse à la taille minimale que doit avoir une structure (nombre d'éléments d'un ensemble, par exemple) pour satisfaire certaines propriétés d'ordre.

On étudie ici les aspects combinatoires fondamentaux de cette théorie, par l'étude de deux versions complémentaires et équivalentes du théorème de RAMSEY, avant de s'intéresser à des applications dans des domaines divers. On utilise enfin la génération informatique de graphes aléatoires pour estimer des grandeurs difficilement calculables relatives à la théorie de RAMSEY.

Table des matières

1	Introduction à la théorie de RAMSEY	2
2	Définitions et deux versions du théorème	2
2.1	Version infinie	3
2.2	Notations et nombres de RAMSEY	3
2.3	Version finie	3
2.4	Théorème de VAN DER WAERDEN	4
3	Quelques applications	4
3.1	Théorème de SCHUR et coloriage	4
3.2	Théorème de SCHUR	4
3.3	Applications à la géométrie	4
4	Cas des graphes	5
4.1	Généralités	5
4.2	Majoration de $R(s, t)$	5
4.3	Minoration	5
4.4	Évaluation de $\mathcal{P}_0(s, n)$ par des graphes aléatoires	6
5	Bibliographie	8
6	Annexe	8
6.1	Preuve du théorème de RAMSEY infini	8
6.2	Preuve du théorème de RAMSEY fini	9
6.3	Théorème de VAN DER WAERDEN	10
6.4	Preuve du théorème de SCHUR relatif aux équations de type FERMAT	10
6.5	Preuve du théorème d'ERDÖS-SZEKERES	10
6.6	Preuve de la majoration de $R(s, t)$	11
6.7	Calculs pour la minoration de $R(s, s)$	11

1 Introduction à la théorie de RAMSEY

Un des problèmes les plus classiques en théorie de RAMSEY est le suivant : on prend un groupe de six personnes. On considère que deux personnes données soit se connaissent, soit ne se connaissent pas, et que cette relation est symétrique. Alors dans ce groupe, soit il y en a trois qui se connaissent toutes deux à deux, soit il y en a trois qui ne se connaissent jamais deux à deux, les deux cas pouvant se produire simultanément. Six est, de plus, le plus petit nombre de personnes satisfaisant cette propriété. On peut visualiser le problème comme un problème de graphes, en prenant un graphe complet à six sommets représentant les personnes, et où on colorie chaque arête en bleu ou en rouge, selon que les personnes reliées se connaissent ou non. Le résultat précédent s'énonce alors comme suit : le graphe K_6 est le plus petit graphe complet contenant au moins une **3-clique monochromatique** (sous-graphe K_3 dont toutes les arêtes sont coloriées de la même couleur) pour tout **coloriage** possible (cette notion sera formalisée dans la suite).

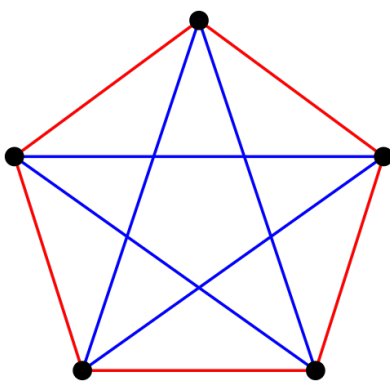


FIGURE 1: K_5 colorié en deux couleurs.

Comme le montre la figure 1, il existe un coloriage de K_5 (i.e. une configuration de connaissances entre cinq personnes) pour lequel il n'existe aucune 3-clique monochromatique.

Montrons que six personnes suffisent. Appelons-les A, B, C, D, E, F . Considérons A . Soit A connaît trois personnes, soit il y en a trois que A ne connaît pas. Prenons le premier cas. Appelons ses connaissances B, C, D . Parmi B, C, D , soit il y en a deux qui se connaissent, et alors avec A , ils forment une 3-clique convenable, soit deux d'entre B, C, D ne se connaissent jamais, et alors ils forment une 3-clique de personnes ne se connaissant pas. Le même phénomène se produit lorsque, au départ, il existe trois personnes que A ne connaît pas. Dans tous les cas, une 3-clique convenable existe, et ce pour tout coloriage. Comme six suffisent et que cinq ne suffisent pas, on notera plus tard, en théorie de RAMSEY, $R(2, 2, 3, 3) = 6$, notation qui sera expliquée.

2 Définitions et deux versions du théorème

Définition 1. Soit r un entier non nul (nombre de couleurs), $\{c_1, \dots, c_r\}$ une palette de couleurs, k un entier non nul, E un ensemble contenant au moins k éléments. Un **k -coloriage** de E est une application $\chi : \mathcal{P}_k(E) \rightarrow \{c_1, \dots, c_r\}$, qui à toute partie de E de cardinal k associe une couleur.

Une fois la notion de coloriage définie, les théorèmes de RAMSEY traduisent précisément l'apparition inéluctable d'ordre dans les structures à partir d'une certaine taille. Il en existe

deux versions. La version infinie concerne une structure infinie coloriée avec un nombre fini de couleurs ; c'est en quelque sorte une version limite de la deuxième, finie, qui dit qu'à partir d'une certaine taille finie, les mêmes propriétés apparaissent.

2.1 Version infinie

Théorème 2 (théorème de RAMSEY infini). Soit k et r deux entiers strictement positifs, E un ensemble infini. Soit $\chi : \mathcal{P}_k(E) \rightarrow \{c_1, \dots, c_r\}$ un k -coloriage de E . Alors il existe une partie $A \subset E$ infinie dont toutes les sous-parties de cardinal k sont de la même couleur, i.e. $\exists i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall B \in \mathcal{P}_k(A), \chi(B) = c_i$.

Preuve. Voir en annexe.

2.2 Notations et nombres de RAMSEY

Définition 3. Soit n, k, r, m_1, \dots, m_r des entiers strictement positifs. On note :

$$n \longrightarrow (m_1, \dots, m_r)^k$$

lorsque pour tout ensemble E de cardinal n , pour tout k -coloriage χ de E , il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel qu'il existe $A_i \in \mathcal{P}_{m_i}(E)$, telle que toute sous-partie B à k éléments de A_i , $\chi(B) = c_i$. Cette propriété est alors vérifiée par tous les ensembles E de cardinal n .

Lorsque c'est le cas, on note $R(k, r, m_1, \dots, m_r)$ et on appelle **nombre de RAMSEY associé à k, r, m_1, \dots, m_r** le plus petit entier n vérifiant cette propriété.

Remarque 4. Si k, r, m_1, \dots, m_r sont des entiers non nuls, pour tout $n \geq R(k, r, m_1, \dots, m_r)$, on a $n \longrightarrow (m_1, \dots, m_r)^k$. En effet, il suffit de considérer une partie E' de E de cardinal $R(k, r, m_1, \dots, m_r)$ et d'utiliser le résultat d'existence.

Remarque 5. Pour tous k, r, m_1, \dots, m_r , si m'_1, \dots, m'_r sont des entiers non nuls tels que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, m'_i \leq m_i$, alors $n \longrightarrow (m_1, \dots, m_r)^k$ implique $n \longrightarrow (m'_1, \dots, m'_r)^k$. En effet, s'il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel qu'il existe $A_i \subset E$ de cardinal m_i dont toutes les sous-parties de cardinal k sont de couleur c_i , alors toute sous-partie A'_i de A_i de cardinal m'_i convient.

Par conséquent, l'existence de $R(k, r, \underbrace{m, \dots, m}_r)$ avec $m = \max(m_1, \dots, m_r)$ implique l'existence de $R(k, r, m_1, \dots, m_r)$. On notera désormais $R(k, r, m) = R(k, r, \underbrace{m, \dots, m}_r)$.

Remarque 6. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour $r = 1$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le nombre de RAMSEY existe et : $R(k, 1, m) = m$. De plus, l'existence de $R(k, 2, m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ implique l'existence de $R(k, r, m)$ pour tout $r \geq 2$ et $m \in \mathbb{N}$. En effet, on le montre par récurrence en regroupant deux couleurs, et en établissant : $R(k, r + 1, m_1, m_2, m_3, \dots, m_{r+1}) \leq R(k, r, R(k, 2, m_1, m_2), m_3, \dots, m_{r+1})$. Cela montre que le nombre de couleurs, tant qu'il n'est pas 1, ne joue pas de rôle dans l'existence ou non des nombres de RAMSEY.

2.3 Version finie

Remarque 7. La preuve du théorème qui suit suppose l'existence d'un ordre total sur E ; ce n'est absolument pas restrictif car on peut se ramener au cas de $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n = |E|$.

Théorème 8 (théorème de RAMSEY fini). Pour tous entiers non nuls k, r, m_1, \dots, m_r , $R(k, r, m_1, \dots, m_r)$ existe.

Preuve. Voir en annexe.

2.4 Théorème de VAN DER WAERDEN

Un des autres aspects de la théorie de RAMSEY s'intéresse non pas à des coloriage de graphes, mais à des coloriage de suites d'entiers. *Voir le théorème de VAN DER WAERDEN en annexe.*

3 Quelques applications

3.1 Théorème de SCHUR et coloriage

Théorème 9 (théorème de SCHUR sur les coloriage). Soit $r \geq 1$ un nombre de couleurs. Il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout 1-coloriage χ de $\llbracket 1, N \rrbracket$, il existe une solution monochromatique à l'équation $x + y = z$ dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, i.e. il existe $x, y, z \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tels que $\chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$ et $x + y = z$. On notera dans la suite $S(r)$ le plus petit entier N vérifiant cette propriété.

Preuve. Soit $N = R(2, r, 3) - 1$, et soit χ un 1-coloriage de $\llbracket 1, N \rrbracket$. On définit un 2-coloriage χ^* de $\llbracket 1, N + 1 \rrbracket$ par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \chi^*({i, j}) = \chi(|i - j|).$$

Par le théorème de RAMSEY fini et par définition de $R(2, r, 3)$, il existe $A \in \mathcal{P}_3(\llbracket 1, N + 1 \rrbracket)$ dont toutes les sous-parties à 2 éléments sont de la même couleur (pour χ^*), notée c_0 . On note $A = \{i, j, k\}$ avec $i < j < k$. On a $\chi^*({i, j}) = \chi^*({j, k}) = \chi^*({i, k}) = c_0$, et donc $\chi(j - i) = \chi(k - j) = \chi(k - i) = c_0$. Ainsi, en posant $x = j - i$, $y = k - j$ et $z = k - i$, on a bien $x, y, z \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ($i \geq 1$), et $x + y = z$ avec x, y et z de la même couleur pour χ . \square

3.2 Théorème de SCHUR

Le **Grand théorème de FERMAT** dit que pour $n \geq 3$, il n'existe pas de solutions entières non triviales à l'équation $x^n + y^n = z^n$. Un fait remarquable, conséquence du théorème qui précède, est que ce résultat tombe en défaut lorsque l'on réduit modulo p , avec p premier suffisamment grand.

Théorème 10 (théorème de SCHUR relatif aux équations de type FERMAT). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un nombre premier p tel que l'équation

$$x^n + y^n \equiv z^n [p]$$

admette des solutions entières non triviales (x, y et z tous non nuls modulo p).

Preuve. Voir en annexe.

3.3 Applications à la géométrie

Lemme 11 (théorème de KLEIN). Parmi cinq points du plan, si trois quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés, il en existe quatre qui forment un quadrilatère convexe.

Preuve. On considère l'enveloppe convexe des cinq points. Si c'est un pentagone ou un quadrilatère on a le résultat. Sinon, alors c'est un triangle. Notons-le ABC . Les deux autres points, D et E , sont strictement inclus dans ABC . La droite (DE) coupe deux des côtés du triangle, car elle ne passe par aucun de ses sommets (non-alignement). Par exemple, elle coupe $[AB]$ et $[AC]$. Alors le quadrilatère non croisé de sommets B, C, D, E est convexe. \square

Le théorème de KLEIN se généralise :

Théorème 12 (théorème d'ERDŐS–SZEKERES). Soit $k \geq 3$. Alors il existe un entier $N \geq 3$ tel que, pour tout ensemble de N points du plan, trois quelconques d'entre eux jamais alignés, il en existe k formant un k -gone convexe.

Preuve. Voir en annexe.

4 Cas des graphes

4.1 Généralités

Le cas $k = 2$ correspond à un coloriage des paires d'éléments d'un ensemble E , ce qu'on peut voir comme un coloriage des **arêtes d'un graphe non orienté**, au sens usuel du terme. Les éléments de E sont les sommets du graphe, et les paires d'éléments sont les arêtes. On comprend le sens de $R(2, 2, 3, 3) = 6$, vu en introduction.

Remarque 13. Dans le cas $k \geq 2$ général, on peut interpréter les parties à k éléments qu'on colorie comme des **hyper-arêtes d'un hyper-graphe**, qui n'est qu'une généralisation de la notion de graphe à des dimensions supérieures.

Bien que le théorème de RAMSEY fini assure l'existence de sous-graphes complets monochromatiques à partir d'une certaine taille, il ne donne aucun résultat sur la taille minimale. La quête des nombres de RAMSEY est particulièrement ardue : seulement dix nombres non triviaux ont pu être calculés, dont seulement un avec $r \geq 3$ ($R(2, 3, 3, 3, 3) = 17$). Des bornes théoriques existent cependant. Pour simplifier, dans le cas $k = r = 2$, on notera désormais $R(s, t)$ au lieu de $R(2, 2, s, t)$.

4.2 Majoration de $R(s, t)$

On peut montrer que l'on a (voir le calcul fait en annexe) :

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{t-1}. \tag{1}$$

On en déduit, grâce à la formule de STIRLING, une majoration asymptotique de $R(s, s)$:

$$R(s, s) \leq \binom{2s-2}{s-1} = (1 + o(1)) \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}. \tag{2}$$

Cette majoration, une des meilleures à ce jour, reste très large.

4.3 Minoration

On dispose aussi d'une borne inférieure pour $R(s, s)$.

Théorème 14. Soit n un entier tel que $\binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$. Alors $n < R(s, s)$.

Pour le montrer, on utilise la méthode probabiliste d'ERDŐS. Voir la preuve en annexe.

On peut en déduire une minoration plus explicite (voir les calculs en annexe) :

$$R(s, s) \geq \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{\frac{s}{2}}.$$

4.4 Évaluation de $\mathcal{P}_0(s, n)$ par des graphes aléatoires

Comme on l'a vu, très peu (dix) de nombres de RAMSEY sont actuellement connus. Cela est dû à l'impossibilité d'une analyse exhaustive de tous les coloriages du graphe complet d'une taille donnée. En effet, il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ coloriages des arêtes de K_n . Puis, dans K_n , il y a $\binom{n}{s}$ ensembles de s sommets dont on doit tester si ce sont des s -cliques monochromatiques d'une des deux couleurs. Les calculs sont prohibitifs. Par exemple, on ne connaît pas encore $R(5, 5)$, mais on sait que $43 \leq R(5, 5) \leq 49$ (par des encadrements plus poussés que ceux qui précèdent). Il y a $2^{903} \simeq 7 \cdot 10^{271}$ coloriages de K_{43} . Si on travaille à isomorphisme de graphes près (ce qui n'est pas aisé), on élimine un facteur $43! \simeq 6 \cdot 10^{52}$, mais il reste 10^{219} cas à traiter, chacun comportant un test sur $\binom{43}{n} \simeq 10^6$ sous-graphes complets K_5 . Cela explique le peu de nombres de RAMSEY connus avec certitude.

Il paraît alors plus raisonnable de se tourner vers une approche probabiliste reposant sur la génération de coloriages aléatoires d'un graphe complet donné. Ici encore, on ne peut pas espérer en tirer des informations significatives, même probabilistes, sur les nombres de RAMSEY. En effet, $R(4, 4) = 18$. On devrait donc être en mesure de détecter des coloriages de K_{16} et K_{17} sans 4-clique monochromatique. Cependant, il existe seulement deux tels coloriages (à isomorphisme près) sur $6,4 \cdot 10^{22}$ pour K_{16} , et un seul sur $2,5 \cdot 10^{26}$ pour K_{17} .

En revanche, en effectuant les tests pour des graphes plus petits, on trouve une proportion non négligeable de contre-exemples, qui est une estimation de $1 - \mathcal{P}_0(s, n)$.

On a donc calculé ces estimations grâce à un programme CAML, en représentant les graphes par leur matrice d'adjacence (les 0 et les 1 représentent les deux couleurs possibles), en générant un nombre variable de coloriages aléatoires selon le temps de calcul demandé, qui dépend de s et n . Le module `random` sert à la génération pseudo-aléatoire de 0 et de 1. On trouvera le code de l'implémentation CAML en annexe.

On a rassemblé ci-dessous les données obtenues.

$s \setminus n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	24.9	72.2	98.8	1	◇	◇	◇	◇	◇	◇
4	★	3.2	13.0	31.2	55.5	79.0	93.97	99.1	99.95	99.998
5	★	★	0.18	1.04	3.2	7.4	14.7	25.7	40.4	55.8
6	★	★	★	0.007	0.04	0.2	0.4	0.8	2.0	4.0
7	★	★	★	★	0.0002	0.002	0.005	0.001	0.04	0.08

FIGURE 2: Différentes estimations de $\mathcal{P}_0(s, n)$, données en pourcentages. Les données en noir ont été obtenues en considérant 10^4 coloriages, celles en bleu 10^5 , et celles en vert 10^6 .

$s \setminus n$	13	14	15	16	17	18	19
5	70.8	83.1	91.8	97.2	99.3	99.83	99.98
6	6.3	10.3	15.5	*	*	*	*

FIGURE 3: Suite des données. Pour $s = 6$ et $n \geq 16$, les temps de calcul sont conséquents.

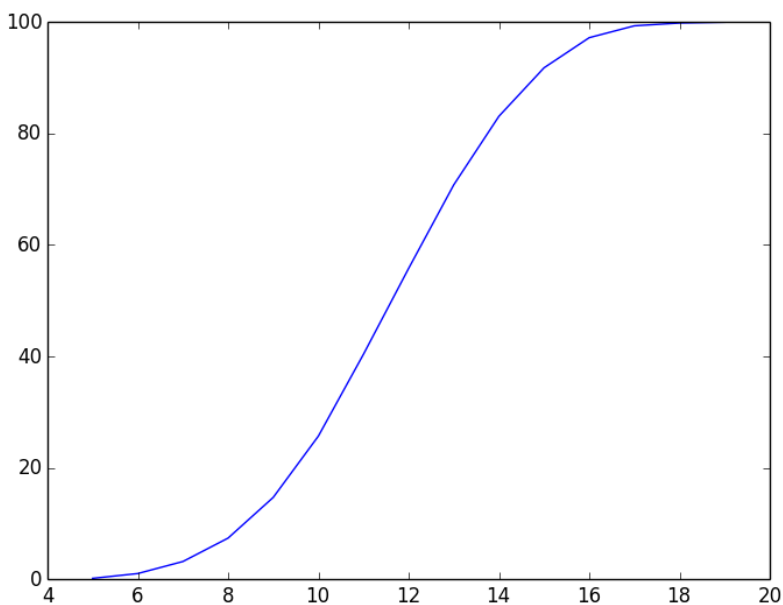


FIGURE 4: Allure de $\mathcal{P}_0(s, n)$ pour $s = 5$. Rappelons que $R(5, 5) \geq 43$.

À s fixé, on observe que pour des valeurs de n proches de s , la proportion de contre-exemples se tasse très près de 1, et que cette proportion est très proche de 0 même pour des valeurs de n encore très inférieures à $R(s, s)$; cela traduit par exemple le très petit nombre de contre-exemples pour $s = 4$ et $n \in \{16, 17\}$, comme on l'a vu, et illustre l'impossibilité de tests probabilistes.

5 Bibliographie

- Ronald L. GRAHAM, Bruce L. ROTHSCHILD, Joel H. SPENCER, *Ramsey Theory, 2nd Edition*, 1990.
- Bruce M. LANDMAN, Aaron ROBERTSON, *Ramsey Theory on the Integers*, American Mathematical Society, 2004.
- Mathias SCHACHT, *Ramsey Theory : Lecture Notes* (Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg), 2011.

6 Annexe

6.1 Preuve du théorème de RAMSEY infini

On raisonne par récurrence sur k , le cardinal des parties auxquelles on attribue une couleur.

Le cas $k = 1$ revient à prouver qu'il existe une partie infinie de E dont tous les éléments, vus comme singletons, sont coloriés de la même couleur. Ce cas découle donc du principe du pigeonnier infini, puisqu'il y a un nombre fini de couleurs.

On suppose le résultat vrai pour $k - 1 \geq 1$. Soit $\chi : \mathcal{P}_k(E) \rightarrow \{c_1, \dots, c_r\}$ un k -coloriage de E . On commence par construire E' , un sous-ensemble (dénombrable par construction) de E sous la forme $\{x_n, n \geq 1\}$, avec les x_n éléments de E , tel que pour tous indices $i_1 < \dots < i_k$, la couleur de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ ne dépende pas de i_k .

On le construit par récurrence, en même temps qu'une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de E , décroissante pour \subset . Les premiers éléments x_1, \dots, x_{k-1} sont simplement pris quelconques distincts deux à deux dans E , et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $S_i = E \setminus \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$.

Soit maintenant $n \geq k - 1$. En supposant les x_i et S_i construits pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on construit S_{n+1} et x_{n+1} . Pour tout $x \in S_n$ et tout choix d'indices $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n$, la couleur de la partie $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x\}$ est donnée par χ . En prenant les couleurs correspondant à tous les $(k - 1)$ -uplets d'indices possibles (i_1, \dots, i_{k-1}) , on crée ainsi un $\binom{n}{k-1}$ -uplet de couleurs. On considère un ordre fixé arbitraire de ces $(k - 1)$ -uplets, qui définit l'ordre dans lequel sont rangées les couleurs dans le $\binom{n}{k-1}$ -uplet de couleur. On note ce dernier $\mathcal{C}(x)$. En faisant varier x dans S_n , ces tuples sont en nombre fini (il y en a au plus $r^{\binom{n}{k-1}}$ distincts), donc par le principe des tiroirs infini, il existe $S_{n+1} \subset S_n$, toujours infinie, telle qu'il existe des indices de couleurs $j_1, \dots, j_{\binom{n}{k-1}} \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tels que $\forall x \in S_{n+1}, \mathcal{C}(x) = (c_{j_1}, \dots, c_{j_{\binom{n}{k-1}}})$. On prend enfin x_{n+1} quelconque dans S_{n+1} .

On a ainsi construit une suite (x_n) injective ($\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in S_n$ et $x_n \notin S_{n+1}$) telle que pour tout choix d'indices $1 \leq i_1 < \dots < i_k$, la couleur de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x\}$ est constante quand x décrit $S_{i_{k-1}+1}$. Or, par construction et décroissance de (S_n) , $x_{i_k} \in S_{i_k} \subset S_{i_{k-1}+1}$ donc la couleur de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}\}$ ne dépend que de $x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}$. Enfin, E' est infini, comme voulu.

Montrons enfin comment E' permet de conclure sur l'hérédité. On définit un coloriage χ_0 sur les parties à $k - 1$ éléments de E' en posant pour tous $i_1 < \dots < i_{k-1}$, $\chi_0(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}\}) = \chi(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}\})$ avec $i_k > i_{k-1}$ quelconque. χ_0 est bien définie par construction de E' . Par hypothèse de récurrence, il existe $A \subset E'$ infinie et telle que toutes les parties à $k - 1$ éléments incluses dans A soient de la même couleur, noté c . Mais A est une partie de E , et si $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \in \mathcal{P}_k(E)$, alors sa couleur est celle de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}\}$, donc c , d'où l'existence

d'une couleur unique pour les sous-parties à k éléments de A , et l'hérédité.

D'où le résultat pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

6.2 Preuve du théorème de RAMSEY fini

On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, à r fixé, en prouvant, pour tout $k : \forall m \in \mathbb{N}^*, R(k, r, m)$ existe.

Pour $k = 1$, on applique le principe des tiroirs, qui donne $\forall m \in \mathbb{N}^*, R(1, r, m) = (m-1)r + 1$. On suppose ensuite le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}^*$ et on le prouve au rang $k+1$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

On prouve, par récurrence sur $j \in \mathbb{N} : \forall p \geq j, \exists f(j, p) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq f(j, p)$, pour tout ensemble E de cardinal n , pour tout $k+1$ -coloriage χ de E , alors il existe $H \in \mathcal{P}_p(E)$, $X, Y \subset E$ tels que (condition $(*)$) :

$$H = X \cup Y, |X| = j, \forall (x, y) \in X \times Y, x < y, \text{ et pour tout } K \in \mathcal{P}_{k+1}(H) \text{ tel que } K \cap X \neq \emptyset, \text{ alors la couleur } \chi(K) \text{ de } K \text{ est entièrement déterminée par } \min_{x \in K} x.$$

Pour $j = 0$, on peut prendre, pour tout $p \geq 0, f(0, p) = p$. En effet, si E est de cardinal $\geq p$, toute partie $H = \underbrace{\emptyset}_X \cup \underbrace{H}_Y \subset E$ à p éléments convient, puisqu'on a bien $|X| = 0 = j$ et qu'on a toujours, pour $K \in \mathcal{P}_{k+1}(H), K \cap X = \emptyset$.

On suppose le résultat vrai au rang $j \in \mathbb{N}$ et on le prouve pour $j+1$. Soit $p \geq j+1$. On pose $f(j+1, p) = f(j, R(k, r, p-j-1) + j+1)$. Ce nombre existe, car $p-j-1 \geq 0$, et par hypothèse de récurrence, les nombres de RAMSEY existent au rang k . De plus, ce nombre est positif, donc $R(k, r, p-j-1) + j+1 \geq j$. Soit $n \geq f(j+1, p)$, et soit E un ensemble à n éléments et χ un $k+1$ -coloriage de E . Par hypothèse de récurrence, il existe $H' \in \mathcal{P}_{R(k, r, p-j-1)+j+1}(E)$ qu'on écrit $H' = X' \cup Y'$ avec $|X'| = j$, satisfaisant $(*)$. On note $x_{j+1} = \min_{y \in Y'} y$.

On définit χ_0 un k -coloriage de $Y' \setminus \{x_{j+1}\}$, en posant, pour tout $Z \in \mathcal{P}_k(Y' \setminus \{x_{j+1}\})$, $\chi_0(Z) = \chi(Z \cup \{x_{j+1}\})$. On a $|Y' \setminus \{x_{j+1}\}| = |H'| - |X'| - 1 = (R(k, r, p-j-1) + j+1) - j - 1 = R(k, r, p-j-1)$. Par définition de $R(k, r, p-j-1)$, il existe $Y \in \mathcal{P}_{p-j-1}(Y' \setminus \{x_{j+1}\})$ dont toutes les sous-parties à k éléments ont la même couleur c_0 . On pose ensuite $X = X' \cup \{x_{j+1}\}$. Alors $H = X \cup Y$ vérifie $(*)$ pour $j+1$. En effet, $|X| = j+1$ et, par choix de x_{j+1} , $\forall (x, y) \in X \times Y, x < y$. Et soit $K \in \mathcal{P}_{k+1}(H)$ tel que $K \cap X \neq \emptyset$; alors la couleur $\chi(K)$ de K est entièrement déterminée par $\mu = \min_{x \in K} x$. En effet, $\mu \in X$, et soit $\mu = x_{j+1}$, et alors $\chi(K) = \chi_0(K \setminus \{\mu\}) = c_0$, indépendant de K , soit $\mu < x_{j+1}$, et alors le résultat sur H' permet de conclure, ce qui donne finalement l'itération au rang $j+1$.

Soit maintenant $n \geq f((m-1)r + k + 1, (m-1)r + k + 1)$, et soit E un ensemble à n éléments, χ un $k+1$ -coloriage de E . Par définition de $f((m-1)r + k + 1, (m-1)r + k + 1)$, il existe $H \in \mathcal{P}_{(m-1)r+k+1}(E)$ satisfaisant $(*)$ (ici, $j = p$ donc $X = H$). Par conséquent, pour tout $K \in \mathcal{P}_{k+1}(H)$, la couleur $\chi(K)$ de K est entièrement déterminée par son élément minimal. Soit H_0 valant H privé de ses k plus grands éléments. Tout élément x de H_0 est l'élément minimal d'au moins une partie à $k+1$ éléments de H . Par ce qui précède, toutes ces parties ont la même couleur. On note $\varphi(x)$ cette couleur. Comme $|H_0| = (m-1)r + 1$, par le principe des tiroirs, il existe M un ensemble de m éléments de H_0 ayant la même image par φ , notée c_0 . Il vient que toute sous-partie K à $k+1$ éléments de M a la même couleur

$\chi(K) = \varphi(\underbrace{\min_{x \in K} x}_{\in M}) = c_0$, ce qui donne l'itération au rang $k + 1$ et clôt la preuve du théorème.

□

6.3 Théorème de VAN DER WAERDEN

Le théorème de VAN DER WAERDEN est un autre résultat fondamental en théorie de RAMSEY, possédant de nombreuses variantes et applications. Il est présenté ici pour illustrer sa ressemblance avec le théorème de RAMSEY. Il ne sera pas utilisé par la suite et est donné sans démonstration. Il possède, comme RAMSEY, une version finie et une version infinie.

Théorème 4 (théorème de VAN DER WAERDEN, version finie). Soit ℓ et r deux entiers strictement positifs. Il existe un entier $w(\ell, r)$ tel que pour tout $n \geq w(\ell, r)$, pour tout coloriage de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en r couleurs, il existe dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ une progression arithmétique monochromatique de longueur ℓ .

Théorème 5 (théorème de VAN DER WAERDEN, version infinie). Pour tout coloriage de \mathbb{N}^* en $r > 0$ couleurs, pour tout $\ell > 0$, il existe dans \mathbb{N}^* une progression arithmétique monochromatique de longueur ℓ .

6.4 Preuve du théorème de SCHUR relatif aux équations de type FERMAT

Soit p un nombre premier tel que $p \geq S(n)$. On considère le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$. Ce groupe étant cyclique, on fixe g un générateur. Ainsi $\mathbb{F}_p^* = \{1, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$. On définit un 1-coloriage χ de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ comme suit. Pour $t \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, il existe un unique $m \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $t = g^m$ (dans \mathbb{F}_p^*). On note m_0 la réduction de m modulo n , et on pose alors $\chi(t) = m_0$. On a donc colorié $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ avec l'ensemble de couleurs $\llbracket 1, n \rrbracket$. Par le théorème de SCHUR sur les coloriages ($r = n$), il existe $a, b, c \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ de la même couleur i tels que $a + b = c$. Par définition de χ , il existe des entiers u_1, u_2, u_3 tels que $a = g^{nu_1+i}$, $b = g^{nu_2+i}$, $c = g^{nu_3+i}$. On a alors :

$$g^{nu_1+i} + g^{nu_2+i} = g^{nu_3+i} \text{ dans } \mathbb{F}_p^*$$

et donc, en divisant par g^i (\mathbb{F}_p^* intègre), on obtient :

$$\underbrace{g^{u_1}^n}_x + \underbrace{g^{u_2}^n}_y = \underbrace{g^{u_3}^n}_z.$$

D'où l'existence d'une solution (x, y, z) entière non triviale à l'équation

$$x^n + y^n \equiv z^n [p].$$

□

6.5 Preuve du théorème d'ERDÖS-SZEKERES

Soit $N \geq R(4, 2, 5, k)$. On colorie les ensembles de quatre points en leur associant la couleur 0 s'ils ne forment pas un quadrilatère convexe, et la couleur 1 sinon. Par le théorème de RAMSEY fini, soit il existe cinq points dont tout sous-ensemble de quatre points ne forme pas un quadrilatère convexe, soit il existe k points dont tout sous-ensemble de quatre points forme un quadrilatère convexe. Le premier cas est impossible, car il contredit le lemme précédent. Le second se produit donc. Si par l'absurde les k points ne forment pas un k -gone convexe, leur enveloppe convexe contient strictement l'un d'entre eux, mettons E . E est alors strictement inclus dans un triangle formé par trois points A, B, C parmi les $k - 1$ autres. Mais alors $\{A, B, C, E\}$ ne forme pas un quadrilatère convexe, ce qui est absurde. □

6.6 Preuve de la majoration de $R(s, t)$

On veut montrer :

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{t-1}. \quad (3)$$

Pour le montrer, établissons déjà l'inégalité :

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1). \quad (4)$$

Prenons le graphe complet à $R(s-1, t) + R(s, t-1)$ sommets. Fixons un sommet A et considérons les couleurs des arêtes reliées à A . Soit il y en a au moins $R(s-1, t)$ de couleur c_s , soit il y en a au moins $R(s, t-1)$ de couleur c_t . Prenons le premier cas. On considère le sous-graphe engendré par les sommets reliés à A par une arête de couleur c_s . Par définition de $R(s-1, t)$, soit il existe un sous-graphe complet à t sommets de couleur c_t , et alors il convient pour le graphe initial. Soit il existe un sous-graphe à $s-1$ sommets de couleurs c_s et alors en ajoutant A , on dispose d'un sous-graphe convenable. Le deuxième est identique. D'où l'inégalité.

On en déduit la majoration $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{t-1}$ par récurrence sur $s+t$.

Pour $s = t = 1$, $R(1, 1) = 1 = \binom{0}{0}$. Supposons le résultat vrai pour une certaine valeur de $s+t-1$. Alors, $R(s-1, t) \leq \binom{s+t-3}{t-1}$ et $R(s, t-1) \leq \binom{s+t-3}{t-2}$ donc par la formule de PASCAL, $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{t-1}$. D'où le résultat. \square

6.7 Calculs pour la minoration de $R(s, s)$

Montrons déjà :

Soit n un entier tel que $\binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$. Alors $n < R(s, s)$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$. On considère le graphe complet à n sommets dont on colorie chaque arête d'une des deux couleurs possibles avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Pour tout sous-graphe complet G de taille s , on note \mathcal{A}_G l'événement : G est monochromatique. On peut calculer sa probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}_G) = \underbrace{2}_{\text{deux couleurs possibles}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} = 2^{1-\binom{s}{2}}.$$

Ainsi, la probabilité $\mathcal{P}_0(s, n)$ qu'il existe un sous-graphe complet de taille s monochromatique dans K_n est majorée par :

$$\mathcal{P}_0(s, n) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{|G|=s} \mathcal{A}_G\right) \leq \sum_{|G|=s} \mathcal{P}(\mathcal{A}_G) = \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}}.$$

Donc par choix de n , $\mathcal{P}_0(s, n) < 1$. Cela implique qu'il existe au moins un coloriage du graphe de départ qui ne vérifie pas la propriété de RAMSEY, et donc $R(s, s) > n$.

On peut en déduire une minoration plus explicite :

$$R(s, s) \geq \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{\frac{s}{2}}.$$

Preuve. Pour tous n, k entiers tels que $k \leq n$, on a l'inégalité :

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

Elle vient du fait que $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$. Puis, par récurrence sur k , $k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k$. En effet, c'est vrai pour $k = 1$ puis $(k+1)! = k! \cdot (k+1) \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot (k+1) \geq \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$ car $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e$, d'où l'inégalité.

Soit donc $n < \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{\frac{s}{2}}$. On a alors $\left(\frac{ne}{s}\right)^s < 2^{\frac{s^2-s}{2}}$ puis $\left(\frac{ne}{s}\right)^s \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$ et enfin $\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$ en utilisant l'inégalité précédente. □

Code Caml utilisé pour la génération et l'étude de graphes aléatoires, pour l'évaluation de $P_0(s, n)$

```
#open "Random" ;;

(* Génère l'ensemble des parties à s éléments de [1, n]. *)

let rec parties = fun
  | s n when s > n -> []
  | 0 n           -> [[]]
  | s n           -> (parties s (n - 1)) @ (map (function l -> n::l)
                                             (parties (s - 1) (n - 1))) ;;

(* Convertit une liste en tableau (plus manipulable) *)

let convert lst =
  let n = list_length lst in
  let h::t = lst in
  let rep = make_vect n h in
  let rec aux l i = match l with
    | [] -> ()
    | h::t -> rep.(i) <- h ; aux t (i + 1)
  in aux lst 0 ;
  rep ;;

(* Teste si partie est une s-clique monochromatique de couleur "couleur"
adj : matrice d'adjacence du graphe
partie : partie de [1, n] qui donne les indices des sommets testés
s : taille de partie *)

let test_est_clique adj partie s couleur =
  let continuer = ref true in
  for i = 0 to (s - 1) do
    for j = 0 to (s - 1) do
      if !continuer && partie.(j) > partie.(i) then (* on regarde la moitié supérieure
droite par symétrie *)
        if adj.(partie.(i) - 1).(partie.(j) - 1) <> couleur then continuer := false
      done
    done ;
  !continuer ;;

(* Renvoie un tableau contenant les parties à s éléments de [1, n], chacune sous forme d'un
tableau contenant les éléments. *)

let init s n =
  let ens_par_s_n = convert (parties s n) in
  let p = vect_length ens_par_s_n in
  let ens_par_s_n_2 = make_vect p [[]] in
  for i = 0 to (p - 1) do
    ens_par_s_n_2.(i) <- convert ens_par_s_n.(i)
  done ;
  ens_par_s_n_2 ;;
```

```
(* Teste si un graphe donné possède une s-clique monochromatique de couleur "couleur".
adj : graphe donné par sa matrice d'adjacence.
s : taille des cliques recherchées.
ens_par : ensemble des parties à s éléments de [1, n], servant à la recherche. *)
```

```
let test_graph adj s couleur ens_par =
  let n = vect_length adj in
  let trouve = ref false in
  let p = vect_length ens_par in
  for i = 0 to (p - 1) do
    if not !trouve then
      trouve := test_est_clique adj ens_par.(i) s couleur
  done ;
  !trouve ;;
```

```
random__init 0 ;; (* Initialisation du générateur intégré de nombre pseudo-aléatoires. *)
```

```
(* Fonction principale. Génère aléatoirement p graphes complets à n sommets, et compte le
nombre d'entre eux qui ne contiennent aucune s-clique monochromatique. *)
```

```
let teste_ramsey s n p =
  let nb_contre_ex = ref 0 in
  let ens_par = init s n in
  for k = 0 to (p - 1) do (* essais *)
    let adj = make_matrix n n 0 in
    for i = 0 to (n - 2) do (* graphe aléatoire (moitié supérieure droite) *)
      for j = (i + 1) to (n - 1) do
        adj.(i).(j) <- random__int 2
      done
    done ;
    if (not (test_graph adj s 0 ens_par)) && (not (test_graph adj s 1 ens_par)) then
      incr nb_contre_ex
  done ;
  (!nb_contre_ex, p) ;;
```

```
teste_ramsey 5 11 10000 ;; (* Exemple d'exécution utilisée pour les données. *)
```

```
(* Variante de la fonction principale qui affiche les graphes générés, et signale par
"-----" les contre-exemples.
```

```
let teste_ramsey s n p =
  let nb_contre_ex = ref 0 in
  let ens_par = init s n in
  for k = 0 to (p - 1) do
    let adj = make_matrix n n 0 in
    for i = 0 to (n - 1) do
      for j = 0 to (n - 1) do
        adj.(i).(j) <- random__int 2 ;
        print_int adj.(i).(j)
      done ;
      print_newline ()
    done ;
    if (not (test_graph adj s 0 ens_par)) && (not (test_graph adj s 1 ens_par)) then
      (incr nb_contre_ex ; print_string "-----") ;
      print_newline () ;
  done ;
  (!nb_contre_ex, p) ;;
```

```
*)
```