TD 0 : Convergence de fonctions mesurables

Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu[\mathrm{X}]$ fini. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles mesurables.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure* vers f si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left[\left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque partout* vers f si

$$\left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, f_n(x) \text{ ne converge pas vers } f(x)\right\} \text{ est négligeable (pour } \mu).$$

Si les f_n et f sont dans L^p, $1 \le p < \infty$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en norme* L^p vers f si

$$\int_{\mathrm{X}} |f_n - f|^p \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 1.— Convergence en mesure

(a) Montrer qu'en général, la convergence en mesure n'implique ni la convergence en norme L^p, ni la convergence presque partout.

(b) En utilisant le lemme de Borel–Cantelli, montrer que si (f_n) converge vers f en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge vers f presque partout.

(c) On note $\mathrm{L}^0(\mathrm{X}, \mu)$ l'espace des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-presque partout. Montrer que sur cet espace, la fonction suivante est une distance et qu'elle métrise bien la convergence en mesure :

$$\delta(f, g) = \inf\left\{\varepsilon > 0 \,\middle|\, \mu\left[|f - g| > \varepsilon\right] \le \varepsilon\right\}.$$

(d) En utilisant le lemme de Borel–Cantelli, montrer que $(\mathrm{L}^0(\mathrm{X}, \mu), \delta)$ est complet.

Exercice 2.— Convergence presque partout

(a) Montrer que si (f_n) converge vers f μ-presque partout, alors (f_n) converge vers f en mesure.

(b) Montrer qu'en général, il n'existe pas de distance sur $\mathrm{L}^0(\mathrm{E}, \mu)$ qui métrise la convergence μ-presque partout.

Exercice 3.— Convergence en norme L^p

On suppose dans tout cet exercice que (f_n) converge en norme L^p $(p < \infty)$ vers f.

(a) Montrer que (f_n) converge en mesure vers f.

(b) Montrer qu'on peut extraire un sous-suite de (f_n) qui converge vers f presque partout.