TD 1 : Théorème de Fubini

Exercice 1.— tribu produit

Montrer que la tribu borélienne complétée sur $\mathbb{R}^2$ (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$) contient strictement le produit des tribus boréliennes complétées sur $\mathbb{R}$ (chacune par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).
On pourra penser à introduire une partie de $\mathbb{R}^2$ *de la forme* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$*, où* A *est une partie négligeable de* $\mathbb{R}$ *et* B *une partie non mesurable.*

Exercice 2.— Soient μ et ν deux mesures $\sigma-$finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Soit $\Delta := \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$

Exercice 3.— calculs d'intégrales

1. Soit $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Calculer $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y f(x, y)$ et $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x f(x, y)$. Cela contredit-il le théorème de Fubini ?
2. En introduisant la fonction $(x, y) \mapsto 1/(1 + y)(1 + x^2 y)$ définie sur $\mathbb{R}_+^2$, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \mathrm{d}x.$$

Exercice 4.— Soit $(\mathrm{E}, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma-$fini et $f : (\mathrm{E}, \mathscr{F}, \mu) \to (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable. Soit encore $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante de classe C^1 telle que $g(0) = 0$. Montrer que $\int_{\mathrm{E}} g \circ f \mathrm{d}\mu = \int_0^{\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\mathrm{d}t$.
Application : Pour f fonction positive, on a

$$\int_{\mathrm{E}} f \mathrm{d}\mu = \int_0^{\infty} \mu(\{f \geq t\})\mathrm{d}t,$$

l'intégrale par rapport à μ s'exprime donc encore comme intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5.— Soit $\mathscr{F}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{F})$. Soient f et g deux fonctions monotones de même sens dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{F}, \mu)$, telles que fg est aussi dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{F}, \mu)$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\int fg \mathrm{d}\mu \geq \int f \mathrm{d}\mu \int g \mathrm{d}\mu.$$

On pourra penser à introduire la fonction $\mathrm{F}(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Exercice 6.— Soit $f :]0,1[^2 \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue bidimensionnelle. La fonction $x \mapsto \int f(x, y)\mathrm{d}y$ peut-elle prendre des valeurs infinies ? Si oui, donner un exemple, et si non, le démontrer.