TD 3 : Dualité $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$

Exercice 1.— Convergence faible

Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue λ. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ est séparable, *i.e.* qu'il contient une partie dénombrable dense.
2. Notons donc D une partie dénombrable dense de $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $g \in \mathrm{D}$,
$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_{\varphi(n)} g d\lambda, \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
3. Montrer que cette limite existe en fait pour tout $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R})$.
4. En déduire qu'il existe $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ telle que l'on ait convergence faible dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ de la suite $(f_{\varphi(n)})$ vers f, *i.e.*
$$\forall g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}), \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_{\varphi(n)} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f g d\lambda.$$

Nous venons en fait de montrer que la boule unité de L^p munie de la topologie faible est compacte[1]. C'est un cas particulier du théorème de Banach-Alaoglu.

Exercice 2.— Continuité automatique

Soit (X, μ) un espace mesuré σ-fini, $p \in [1, +\infty[$, et q son exposant conjugué. Soit $\psi : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X})$, on ait $f\psi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X})$. On veut montrer que $\psi \in \mathrm{L}^q(\mathrm{X})$.
Pour cela notons Φ_ψ la forme linéaire sur $\mathrm{L}^p(\mathrm{X})$ donnée par
$$\Phi_\psi(f) = \int_{\mathrm{X}} f\psi d\mu, \; f \in \mathrm{L}^p.$$

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de sous-ensembles mesurables de X, telle que $\mathrm{X} = \cup_n \mathrm{X}_n$, et $\mu(\mathrm{X}_n) < \infty$ pour tout n. Pour tout $n \geq 0$, notons $\mathrm{Y}_n = \{x \in \mathrm{X}_n | \psi(x) \leq n\}$ et posons pour $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X})$, $\Phi_n(f) = \int_{\mathrm{Y}_n} f\psi d\mu$.

1. Montrer que Φ_n est une forme linéaire continue pour tout n, et que la suite (Φ_n) converge simplement vers Φ_ψ.
2. Déduire du théorème de Banach-Steinhaus que Φ_ψ est continue.
3. Conclure.

1. En fait nous avons seulement montré le critère de Bolzano Weierstrass. Ce critère n'assure la compacité que dans le cas d'un espace métrique. Nous admettons que la boule unité de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ munie de la topologie faible est métrisable.

Exercice 3.— Prédual de L^1, cas atomique

1. Rappeler pourquoi ℓ^1 n'est pas le dual de ℓ^∞.
2. Montrer que ℓ^1 est le dual de c_0, l'ensemble des fonctions qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|(x_n)\| = \sup |x_n|$.
3. Plus généralement, si μ est une mesure σ-finie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, donner un espace dont $\mathrm{L}^1(\mathbb{N}, \mu)$ est le dual.
4. Considérons le cas non σ-fini suivant : $\mathrm{X} = \{0, 1\}$ et μ est la mesure sur $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ définie par $\mu(\{0\}) = 1$, $\mu(\{1\}) = +\infty$. Comparer $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu)$ et le dual topologique de $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$.

Exercice 4.— Prédual de L^1, cas diffus

Soit C un convexe dans un espace vectoriel. Un point $x \in \mathrm{C}$ est dit *extrémal* (dans C) s'il ne peut pas s'écrire sous la forme $x = (x_1 + x_2)/2$ avec $x_1, x_2 \in \mathrm{C}$, $x_1, x_2 \neq x$.
En combinant le théorème de Banach-Alaoglu avec un théorème dû à Krein et Milman, on peut montrer la propriété suivante :

Proposition. Soit E un espace vectoriel normé, et E′ son dual topologique. Alors la boule unité K de E′ a des points extrémaux (et est en fait égale à l'adhérence de l'enveloppe convexe des ses points extrémaux).

On munit $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue. Montrer en utilisant la proposition ci-dessus que $\mathrm{L}^1([0, 1])$ n'est pas le dual d'un espace vectoriel normé.