TD 4 : Changement de variable

Exercice 1.— Echauffement

1. A partir de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy,$$
calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.
2. Soit $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Calculer l'intégrale (par rapport à la mesure de Lebesgue)
$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\langle \mathrm{A}x, x\rangle\right)dx.$$

Exercice 2.— Intégrabilité des fonctions puissances dans $\mathbb{R}^d$. Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $f:\mathbb{R}^d -> \mathbb{R}_+$, nulle en 0, et définie ailleurs par
$$f(x_1, x_2, ..., x_d) = r^{-\alpha},$$
où l'on a posé $r(x_1, ..., x_d) = (x_1^2 + ... + x_d^2)^{1/2}$. Pour quels α la fonction f est-elle intégrable en dehors d'un voisinage de 0 ? En dehors d'un voisinage de $+\infty$?

Exercice 3.— Une once de calculs...

1. Soit D le domaine $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0, x\vee\frac{1}{x}\le y\le 3x\wedge\frac{3}{x}\}$. Calculer l'intégrale de la fonction $f:(x,y)\mapsto xy$ sur D par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\mathrm{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \sqrt{|yz|}+\sqrt{|xz|}+\sqrt{|xy|}\le 1\}$. Calculer le volume de D.

Exercice 4.— Formule des compléments On note Γ la fonction définie pour $x>0$ par
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$
Soient $a, b > 0$.

1. Calculer la mesure image de la mesure
$$x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\{x,y\ge 0\}}dxdy$$
par l'application $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\mapsto(x+y, x/(x+y))$.
2. En déduire la formule des compléments
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt.$$

Exercice 5.— Théorème de Sard

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathrm{S} = \{x \in \Omega, \mathrm{Jac}_f(x) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de f. On veut montrer que l'ensemble $\mathrm{C} = f(\mathrm{S})$ des *valeurs critiques* de f est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer qu'il suffit de prouver l'énoncé suivant : *Soit* $\mathrm{Q} \subset \Omega$ *un cube compact. La mesure de* $f(\mathrm{S} \cap \mathrm{Q})$ *est nulle.*;
2. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $h > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathrm{Q}$,

$$\|x - y\|_\infty \leq h \to \|\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y)\| \leq \varepsilon.$$

   (i) Justifier que h existe ;

   (ii) Pour $a \in \mathrm{Q} \cap \mathrm{C}$, soit $\mathrm{Q}_h \subset \mathrm{Q}$ un cube de coté h contenant a. Montrer que la mesure de $f(\mathrm{Q}_h)$ est majorée par $\alpha \varepsilon h^d$, où α est une constante indépendante de ε.
3. Conclure.

Application : Soient U et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{D}$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour toute fonction borélienne $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_{\mathrm{D}} f(x) dx = \int_{\mathrm{U}} f(\varphi(u)) |\mathrm{Jac}_\varphi(u)| du.$$

Exercice 6.— mesures de Lebesgue sur les sphères unités.

Dans tout cet exercice, λ_{S^d} désignera la mesure de Lebesgue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^{d+1}$, et $\mathrm{A}_d = \lambda_{\mathrm{S}^d}(\mathrm{S}^d)$ désignera son "volume".

1. Soit μ_d la mesure sur $\mathrm{S}^{d-1} \times (-1,1)$ absolument continue par rapport à $\lambda_{\mathrm{S}^{d-1}} \otimes \lambda$, et de densité $f(\omega, y) = (1-y^2)^{(d/2-1)}$. Soit $\Psi : \mathrm{S}^{d-1} \times (-1,1) \to \mathrm{S}^d$ définie par $\Psi(\omega, y) = ((1-y^2)^{1/2}\omega, y)$.

   (a) Montrer que pour $\mathrm{F} \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$, on a

$$\int_{(0,\infty)} r^d \left(\int_{\mathrm{S}^{d-1} \times (-1,1)} \mathrm{F}\left(r\Psi(\omega, y)\right) \mu_d(d\omega \times dy) \right) dr$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d \times (-1,1)} |x|(1-y^2)^{(d/2-1)} \mathrm{F}\left((1-y^2)^{1/2}x, |x|y\right) dx dy,$$

   où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $|x|$ la norme du vecteur x.

   (b) En utilisant un changement de variable approprié, montrer que cette dernière intégrale est aussi égale à l'intégrale de F sur $\mathbb{R}^{d+1}$. En déduire que λ_{S^d} est la mesure image de μ_d par Ψ.
2. On s'intéresse au comportement asymptotique de la mesure image de ν_d, la mesure image de $\frac{1}{\mathrm{A}_d}\lambda_{\mathrm{S}^d}$ par la première projection, quand d tend vers l'infini.

(a) Pour $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R})$ et $d \geq 1$, on note

$$\mathrm{I}_d := \frac{1}{\mathrm{A}_d} \int_{\mathrm{S}^d} f(z_1) \lambda_{\mathrm{S}^d}(dz).$$

Montrer que l'on a

$$\mathrm{I}_d = \frac{\mathrm{A}_{d-1}}{\mathrm{A}_d \sqrt{d}} \int_{(-\sqrt{d}, \sqrt{d})} f\left(\frac{x}{\sqrt{d}}\right) (1 - \frac{x^2}{d})^{\frac{d}{2}-1} dx.$$

(b) En déduire que ν_d converge étroitement vers le Dirac en 0. Montrer par contre que $\tilde{\nu}_d$, la mesure image de ν_d par la multiplication par $\sqrt{d}$, converge étroitement vers la mesure

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Vous attendiez-vous à un tel résultat ?