TD 5 : Dérivation au sens de Lebesgue

Exercice 1.— Dérivation des fonctions à variation bornées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dite à variation bornée si

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < +\infty,$$

le supremum étant pris sur toutes les suites finies $x_0 \leq ... \leq x_n$. On cherche à montrer qu'une fonction à variation bornée est dérivable presque partout, et que sa dérivée est intégrable.

1. On suppose que f est croissante et continue à droite. Montrer alors le résultat.
2. Montrer que le résultat reste vrai sans l'hypothèse de continuité à droite.
3. Dans le cas général, montrer que f peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes, et conclure.

Indication : Dans la première question, on pourra penser à montrer à introduire et à différentier la mesure dont $f - \textit{constante}$ est la fonction de répartition. Dans la dernière question, on pourra construire explicitement les deux fonctions, à l'aide de la fonction de variation totale $\mathrm{V}_f(x) := \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, le sup étant pris seulement sur les suites telles que $x_0 \leq ... \leq x_n \leq x$.

Exercice 2.— Intégration de la dérivée

I. On rappelle qu'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout n et pour tous segments disjoints $[x_1, y_1], ..., [x_n, y_n]$ inclus dans $[0,1]$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - x_i < \eta \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et continue à droite telle que $f(0) = 0$. Soit f' sa dérivée, bien définie presque partout et intégrable, d'après l'exercice précédent. Montrer que l'on a
$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt$$
pour tout $x \in [0,1]$, si et seulement si f est absolument continue.
2. En déduire que toute fonction absolument continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie le Théorème Fondamental de l'intégration :
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

II. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ la fonction escalier de Cantor. On définit $g(x) = (x + f(x))/2$ et f^{-1} et g^{-1} les fonctions réciproques continues à droite de f et g, définies par

$$f^{-1}(x) := \inf\{y \geq 0, f(y) > x\} \quad \text{et} \quad g^{-1}(x) := \inf\{y \geq 0, g(y) > x\}.$$

Pour chacune de ces quatre fonctions, indiquer en quels points elle est continue, en quels points elle est dérivable, la valeur de sa dérivée, l'intégrale de la dérivée, et indiquer si elle est absolument continue.

Exercice 3.— Fonctions très (trop ?) périodiques

Soient $\mathrm{S}, \mathrm{T} > 0$ tels que S/T soit irrationnel. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable S-périodique et T-périodique. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = c$ presque partout. On pourra considérer les ensembles $\{f > a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$.
Aucune hypothèse de continuité n'est supposée ! Noter que f peut être non constante malgré tout.

Exercice 4.— Un peu de bricolage La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ sera notée λ.

1. Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$, with $\alpha \geq \beta$. Construire un ensemble mesurable $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\liminf_{a \to 0} \frac{\lambda(\mathrm{E} \cap]-a, a[)}{2a} = \alpha \text{ et } \limsup_{a \to 0} \frac{\lambda(\mathrm{E} \cap]-a, a[)}{2a} = \beta.$$

2. Construire une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, monotone, qui ne soit constante sur aucun segment, mais pourtant $f'(x) = 0$ λ-presque partout.
   Indication : il suffit de construire une mesure diffuse μ singulière par rapport à λ telle que $\mu(\mathrm{I}) > 0$ pour tout ouvert I. Pourquoi ?