TD 6 : Pot-pourri

Exercice 1.— mesures de Lebesgue sur les sphères unités.

Dans tout cet exercice, λ_{S^d} désignera la mesure de Lebesgue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^{d+1}$, et $\mathrm{A}_d = \lambda_{\mathrm{S}^d}(\mathrm{S}^d)$ désignera son “volume”.

1. Soit μ_d la mesure sur $\mathrm{S}^{d-1} \times (-1,1)$ absolument continue par rapport à $\lambda_{\mathrm{S}^{d-1}} \otimes \lambda$, et de densité $f(\omega, y) = (1-y^2)^{(d/2-1)}$. Soit $\Psi : \mathrm{S}^{d-1} \times (-1,1) \to \mathrm{S}^d$ définie par $\Psi(\omega, y) = ((1-y^2)^{1/2}\omega, y)$.
   (a) Montrer que pour $\mathrm{F} \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$, on a
   $$\int_{(0,\infty)} r^d \left(\int_{\mathrm{S}^{d-1}\times(-1,1)} \mathrm{F}\left(r\Psi(\omega,y)\right) \mu_d(d\omega \times dy) \right) dr$$
   $$= \int_{\mathbb{R}^d \times (-1,1)} |x|(1-y^2)^{(d/2-1)} \mathrm{F}\left((1-y^2)^{1/2}x, |x|y\right) dxdy,$$
   où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $|x|$ la norme du vecteur x.
   (b) En utilisant un changement de variable approprié, montrer que cette dernière intégrale est aussi égale à l'intégrale de F sur $\mathbb{R}^{d+1}$. En déduire que λ_{S^d} est la mesure image de μ_d par Ψ.
2. On s'intéresse au comportement asymptotique de ν_d, la mesure image de $\frac{1}{\mathrm{A}_d}\lambda_{\mathrm{S}^d}$ par la première projection, quand d tend vers l'infini.
   (a) Pour $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R})$ et $d \geq 1$, on note
   $$\mathrm{I}_d := \frac{1}{\mathrm{A}_d} \int_{\mathrm{S}^d} f(z_1) \lambda_{\mathrm{S}^d}(dz).$$
   Montrer que l'on a
   $$\mathrm{I}_d = \frac{\mathrm{A}_{d-1}}{\mathrm{A}_d \sqrt{d}} \int_{(-\sqrt{d},\sqrt{d})} f\left(\frac{x}{\sqrt{d}}\right) (1 - \frac{x^2}{d})^{\frac{d}{2}-1} dx.$$
   (b) En déduire que ν_d converge étroitement vers le Dirac en 0. Montrer par contre que $\tilde{\nu}_d$, la mesure image de ν_d par la multiplication par $\sqrt{d}$, converge étroitement vers la mesure
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$
   Vous attendiez-vous à un tel résultat ?

Exercice 2.— Points de Lebesgue et suites gentiment contractantes.

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une suite $(\mathrm{E}_n)_n$ de boréliens de $\mathbb{R}^d$ se contracte gentiment en $x \in \mathbb{R}^d$ si on peut inclure, pour tout n, le borélien E_n dans une boule $\mathrm{B}(x, r_n)$ centrée en x et de rayon strictement positif de sorte que :

$$\inf \frac{\lambda(\mathrm{E}_n)}{\lambda(\mathrm{B}(x,r_n))} > 0 \qquad \text{et} \qquad r_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathrm{D}\mu$ sa dérivée symétrique définie presque partout, et μ_s, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, de sorte que pour tout borélien E, on a

$$\mu(\mathrm{E}) = \mu_s(\mathrm{E}) + \int_{\mathrm{E}} \mathrm{D}\mu(x)\lambda(dx).$$

Soit x un point où $\mathrm{D}\mu$ est définie et tel que $\mathrm{D}\mu_s(x) = 0$.

1. On suppose de plus que x est un point de Lebesgue de $\mathrm{D}\mu$. Soit $(\mathrm{E}_n)_n$ une suite de boréliens se contractant gentiment en x. Montrer que l'on a :

$$\frac{\mu(\mathrm{E}_n)}{\lambda(\mathrm{E}_n)} \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{D}\mu(x).$$

   application : une fonction croissante et continue à droite est presque partout dérivable (de dérivée $\mathrm{D}\mu(x)$*).*

2. On suppose que x n'est pas un point de Lebesgue de $\mathrm{D}\mu$. Soit r_n une suite strictement décroissante tendant vers 0 telle que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(\mathrm{B}(x,r_n))} \int_{\mathrm{B}(x,r_n)} |\mathrm{D}\mu(y) - \mathrm{D}\mu(x)|\lambda(dy) > 0.$$

   On introduit $\mathrm{F}_n = \{y \in \mathrm{B}(x,r_n), \mathrm{D}\mu(y) \geq \mathrm{D}\mu(x)\}$ et $\mathrm{G}_n = \{y \in \mathrm{B}(x,r_n), \mathrm{D}\mu(y) \leq \mathrm{D}\mu(x)\}$

   (a) Montrer que les deux limites supérieures

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(\mathrm{B}(x,r_n))} \int_{\mathrm{F}_n} |\mathrm{D}\mu(y) - \mathrm{D}\mu(x)|\lambda(dy)$$

   et

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(\mathrm{B}(x,r_n))} \int_{\mathrm{G}_n} |\mathrm{D}\mu(y) - \mathrm{D}\mu(x)|\lambda(dy)$$

   sont strictement positives.

   (b) Construire une suite $(\mathrm{E}_n)_n$ se contractant gentiment en x telle que $\mu(\mathrm{E}_n)/\lambda(\mathrm{E}_n)$ n'a pas de limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.— Transformée de Fourier : un autre point de vue On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue divisée par $\sqrt{2\pi}$, notée m

1. Remontrer à l'aide de la transformée de Fourier que $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, munie du produit de convolution, est une algèbre de Banach commutative sans unité.

2. Pour une algèbre de Banach A, une forme linéaire continue $\varphi : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ est appelé un *caractère* si

$$\forall a, b \in \mathrm{A}\ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

   Soit φ un caractère de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

   (a) Justifier l'existence d'une fonction $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$.

(b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\varphi(f)g(y) = \varphi(\tau_y(f))$. En déduire que g coïncide presque partout avec une fonction continue et que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = g(x)g(y).$$

(c) Montrer l'existence d'un $t \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) = e^{-itx}$, puis que pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\varphi(f) = \varphi_t(f) := \hat{f}(t).$$

Ainsi on voit que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble X des caractères de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Si on munit X de la topologie faible-*, cette application est en fait un homéomorphisme. Ceci permet de donner une autre définition de la transformée de Fourier ; c'est l'application injective

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, m) & \to & \mathrm{C}(\mathrm{X}) \\ f & \mapsto & \{\varphi \mapsto \varphi(f)\}. \end{array}$$

De manière analogue, on peut définir la transformée de Fourier sur des groupes abéliens plus généraux. Que donnerait par exemple la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}$? Sur $\mathbb{S}^1$?