TD 7 : Transformée de Fourier

Exercice 1.— Soit $f \in \mathrm{L}^1$, $f > 0$. Montrer que $|\hat{f}(y)| < \hat{f}(0)$ pour tout $y \neq 0$.

Exercice 2.— Soient $\alpha > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, notons

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx \text{ et } \mathrm{F}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2k\pi).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \sum \varphi(n)e^{inx}$.
2. Calculer $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et en déduire l'égalité

$$\frac{e^{2\pi\alpha} + 1}{e^{2\pi\alpha} - 1} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice 3.— Le critère de Polya

Soit φ une fonction positive sur $\mathbb{R}$, paire, telle que $\varphi(0) = 1$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$ et φ est décroissante convexe sur $\mathbb{R}_+$. On veut montrer que φ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité.

1. Montrer que pour tout $s > 0$, la fonction $\varphi_s : t \mapsto (1 - |\frac{t}{s}|)_+$ vérifie les hypothèses de l'énoncé, et est la transformée de Fourier de la fonction $f_s : x \mapsto \frac{1-\cos(sx)}{\pi s x^2}$.
2. Montrer que φ admet une dérivée à droite φ' en tout point de $]0, +\infty[$. Montrer que φ' est continue à droite et croissante.
3. Notons μ une mesure positive sur $]0, +\infty[$ telle que $\mu(]a, b]) = \varphi'(b) - \varphi'(a)$ pour tous $a < b \in]0, +\infty[$. Justifer que μ existe.
4. Soit ν la mesure donnée par $d\nu(s) = sd\mu(s)$. Montrer que pour $t > 0$, on a

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \varphi_s(t)d\nu(s).$$

   En déduire que de plus ν est une mesure de probabilité. Ainsi nous avons écrit φ comme "combinaison convexe" des φ_t. Que reste t'il à faire pour conclure ?
5. Application : Montrer que $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité. En fait ce résultat est aussi vrai si $\alpha < 2$.

Exercice 4.— Transformée de Fourier : un autre point de vue On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue divisée par $\sqrt{2\pi}$, notée m

1. Remontrer à l'aide de la transformée de Fourier que $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, munie du produit de convolution, est une algèbre de Banach commutative sans unité.
2. Pour une algèbre de Banach A, une forme linéaire continue $\varphi : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ est appelé un *caractère* si
$$\forall a, b \in \mathrm{A}\, \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$
Soit φ un caractère de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier l'existence d'une fonction $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$.
   (b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\varphi(f)g(y) = \varphi(\tau_y(f))$. En déduire que g coïncide presque partout avec une fonction continue et que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = g(x)g(y).$$
   (c) Montrer l'existence d'un $t \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) = e^{-itx}$, puis que pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,
$$\varphi(f) = \varphi_t(f) := \hat{f}(t).$$

Ainsi on voit que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble X des caractères de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Si on munit X de la topologie faible-*, cette application est en fait un homéomorphisme. Ceci permet de donner une autre définition de la transformée de Fourier ; c'est l'application injective
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, m) & \to & \mathrm{C}(\mathrm{X}) \\ f & \mapsto & \{\varphi \mapsto \varphi(f)\}. \end{array}$$

De manière analogue, on peut définir la transformée de Fourier sur des groupes abéliens plus généraux. Que donnerait par exemple la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}$? Sur $\mathbb{S}^1$?