TD 8

Exercice 1.— équi-intégrabilité

Soit μ une mesure finie sur un espace mesurable $(\mathrm{E},\mathscr{A})$. Un sous-ensemble Γ de $\mathrm{L}^1(\mathrm{E},\mathscr{A},\mu)$ est dit équi-intégrable (ou uniformément intégrable) si

$$\sup_{f\in\Gamma}\int_{\{|f|\geq a\}}|f|\mathrm{d}\mu \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Montrer qu'un ensemble fini est équi-intégrable.
2. Montrer qu'un ensemble équi-intégrable est toujours borné dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{E},\mathscr{A},\mu)$, mais que la réciproque n'est pas vraie.
3. Montrer qu'un ensemble borné dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{E},\mathscr{A},\mu)$ pour un $p>1$ est équi-intégrable.
4. * Montrer qu'un sous-ensemble Γ de $\mathrm{L}^1(\mathrm{E},\mathscr{A},\mu)$ est équi-intégrable si et seulement si il existe une fonction positive mesurable G telle que $\mathrm{G}(x)/x\to\infty$ quand $x\to\infty$, vérifiant
$$\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathrm{E}}\mathrm{G}(f)\mathrm{d}\mu<\infty.$$
5. Montrer que si Γ est équi-intégrable alors elle est équi-continue, c'est-à-dire
$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall \mathrm{A}\in\mathscr{A},\mu(\mathrm{A})\leq\delta\Rightarrow\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathrm{A}}|f|\mathrm{d}\mu\leq\varepsilon.$$
Montrer que la réciproque est vraie si Γ est de plus supposée bornée dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{E},\mathscr{A},\mu)$. On pourra remarquer par ailleurs que cela est toujours vérifié si μ est la mesure de Lebesgue sur un compact de $\mathbb{R}$.
6. Soit $(f_n,\ n\geq 1)$ une suite de $\mathrm{L}^1(\mathrm{E},\mathscr{A},\mu)$. On suppose que f_n converge $\mu-$presque partout vers f quand $n\to\infty$. Montrer que f_n converge dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{E},\mathscr{A},\mu)$ vers f si et seulement si l'ensemble $\{f_n,n\geq 1\}$ est équi-intégrable.

Exercice 2.— Sous-espaces de L^2 invariants par translation

Un sous-espace K de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est dit invariant par translation si pour toute fonction $f\in\mathrm{K}$ et tout $h\in\mathbb{R}$, la fonction $\tau_h f=f(\cdot-h)$ est aussi dans K.

1. Soit $\mathrm{A}\subset\mathbb{R}$, un sous-ensemble mesurable et soit $\mathrm{K}_\mathrm{A}\subset\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions $f\in\mathrm{L}^2$ telles que $\hat{f}(x)=0$, pour presque tout $x\in\mathrm{A}$. Montrer que K est un sous-espace fermé de L^2, qui est invariant par translation.
2. On va montrer que tout sous-espace fermé invariant par translation $\mathrm{K}\subset\mathrm{L}^2$ est égal à K_A pour un cetain $\mathrm{A}\subset\mathbb{R}$. Notons $\hat{\mathrm{K}}\subset\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ l'image de K par la transformée de Fourier.
   (a) Justifier que $\hat{\mathrm{K}}$ est fermé. Soit P la projection orthogonale sur $\hat{\mathrm{K}}$.

(b) Montrer que pour toutes $f, g \in \hat{\mathrm{K}}$, la fonction $(f - \mathrm{P}(f))\overline{\mathrm{P}(g)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ a une transformée de Fourier nulle. En déduire que $f\mathrm{P}(g) = \mathrm{P}(f)g$.

(c) Montrer qu'il existe donc une fonction mesurable φ telle que pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{P}(f) = \varphi f.$$

(d) Conclure.

3. Quand a-t'on $\mathrm{K}_\mathrm{A} = \mathrm{K}_\mathrm{B}$?

Exercice 3.— Translations sur le tore

Soit $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ le tore de dimension d, où $d \geq 1$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^d$, on note

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{S}_\alpha : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & x + \alpha. \end{array}$$

1. Montrer que S_α donne par passage au quotient une application $\mathrm{T}_\alpha : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ bien définie.
2. Montrer que T_α est ergodique si et seulement si le $d+1$-uplet de réels $(1, \alpha)$ forme une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. On pourra s'inspirer du cours.