TD 9 : Théorie ergodique

Exercice 1.— Mesure invariante ?

Soit X un espace topologique compact muni de la tribu des boréliens, et $T : X \to X$ mesurable. On se demande si l'on peut trouver une mesure sur X invariante pour T. On admettra que l'ensemble des mesures de probabilité sur X est un espace compact pour la topologie de la convergence étroite.

1. Soit $x_0 \in X$ et, pour $n \geq 1$, soit

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x_0}.$$

   Justifier qu'il existe mesure de probabilité μ sur X et une suite extraite $(\mu_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge étroitement vers μ.
2. Vérifier que la suite $(T_*\mu_{n_k})$ converge encore vers μ.
3. Si T est continue, montrer que μ est invariante pour T. Donc toute transformation continue de X admet une mesure de probabilité invariante.
4. Sur $X = [0, 1]$, on définit T par $T(x) = x/2$ si $x > 0$ et $T(0) = 1$. Montrer qu'il n'existe pas de mesure invariante pour T.

Quelques systèmes dynamiques

Exercice 2.— Décalage de Bernoulli : Plusieurs avatars

Considérons les trois espaces de probabilité (X, λ), (Y, μ) et (Z, ν) suivants.
(X, λ) est le cercle muni de la mesure de Lebesgue, $(Y, \mu) = \Pi_{n\geq 0}(Y_0, \mu_0)$ où μ_0 est la mesure sur $Y_0 = \{0, 1\}$ définie par $\mu_0(\{0\}) = \mu_0(\{1\}) = 1/2$ et $(Z, \nu) = (\mathbb{R}, \frac{1}{\pi(1+x^2)}d\lambda)$.
Montrer que les systèmes dynamiques suivants préservent bien la mesure de probabilité correspondante, et qu'ils sont deux à deux isomorphes.

1. Le doublement de l'angle sur le cercle

$$T_1 : x \in X \mapsto 2x \in X.$$

2. Le *décalage de Bernoulli* défini sur (Y, ν) par

$$T_2 : (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \cdots).$$

3. L'application $T_3 : (Z, \nu) \to (Z, \nu)$ définie par $T_3(0) = 0$ et

$$T_3 : x \mapsto \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}), \text{ si } x \neq 0.$$

En particulier, toutes ces transformations sont ergodiques.

Exercice 3.— Ergodicité des rotations irrationnelles : Une autre preuve

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et T la rotation d'angle α sur le cercle $X = \mathbb{S}_1$, muni de la mesure de Lebesgue normalisée. Nous allons donner une autre preuve de l'ergodicité de T.

1. Supposons que $I \subset X$ est un intervalle de mesure $1/k$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des entiers $n_1 = 0, n_2, \cdots, n_k$ tels que $\mu(T^{n_i}(I) \cap T^{n_j}(I)) \leq \varepsilon$ pour tous $i \neq j$, et
$$\mu(\cup_{i=1}^k T^{n_i}(I)) \geq 1 - \varepsilon.$$
2. Montrer que T est ergodique. On pourra penser aux points de Lebesgue.

Exercice 4.— Action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur le tore. Soit $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et $A \in \mathrm{SL}_2(\mathrm{Z})$. Montrer que l'action de A sur $\mathbb{R}^2$ définit par passage au quotient une application bien définie sur X qui préserve la “mesure de Lebesgue sur le tore" (c'est à dire la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'identification $X \simeq]0,1] \times]0,1]$).

Récurrence et ergodicité

Exercice 5.— L'ergodicité est-elle une notion stable par produit direct ?

Si T agit ergodiquement sur un espace (X, μ) et S agit ergodiquement sur (Y, ν), alors l'action $S \times T$ sur $(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ donnée par $(S \times T)(x, y) = (Sx, Ty)$ est-elle ergodique ?

Exercice 6.— Mesures invariantes et ergodicité

1. Un système dynamique peut-il avoir plusieurs mesures de probabilité invariantes ? Si oui, l'action peut-elle être ergodique pour une mesure et non ergodique pour une autre ? On pourra penser au doublement de l'angle sur le cercle.
2. Soit X compact et $T : X \to X$ mesurable inversible, d'inverse mesurable. On suppose qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ ergodique pour T, et une autre mesure de probabilité borélienne ν, absolument continue par rapport à μ, et invariante pour T. Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 7.— Transitivité presque sûre

Soit X un espace métrique compact, et $T : X \to X$ une application mesurable. On suppose qu'il existe une mesure (borélienne) de probabilité μ qui est T-ergodique. Montrer que pour μ-presque tout $x \in X$, pour tout $y \in \mathrm{supp}(\mu)$, il existe une suite d'entiers $(n_k)_k$ qui tend vers l'infini telle que $T^{n_k}(x) \to y$.