TD 10 : Théorie ergodique

Exercice 1.— Echauffement

Soit (X, μ) un espace mesuré, et $T : X \to X$ une application mesurable inversible, d'inverse mesurable, préservant μ. Montrer que pour tout $f \in L^1(X)$, pour presque tout $x \in X$,

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f(T^n x) = \lim_N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f(T^{-n} x).$$

Exercice 2.— puissances de 2

Pour $1 \leq k \leq 9$, on note A_k l'ensemble des entiers $n \geq 0$ tels que le premier chiffre de l'écriture décimale de 2^n est k. L'ensemble A_k admet-il une fréquence asymptotique, et si oui, laquelle ?

Exercice 3.— unique ergodicité

Soit X un espace métrique compact, et $T : X \to X$ une application continue. On dit que T est *uniquement ergodique* s'il existe une unique mesure de probabilité Borélienne T-invariante sur X.

1. Montrer que pour α irrationnel, la rotation d'angle α sur le cercle est uniquement ergodique.
2. On suppose que pour toute fonction continue $f \in C(X)$, la somme de Birkhoff

$$S_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f(T^n x)$$

   converge vers une constante C_f, uniformément en $x \in X$ quand N tend vers l'infini. Montrer qu'alors T est uniquement ergodique.
3. On souhaite montrer la réciproque. Supposons donc T uniquement ergodique, et notons μ l'unique mesure T-invariante sur X.
   (i) Montrer que μ est T-ergodique. Que doit valoir la constante C_f de la question 2 ?
   (ii) Montrer en raisonnant par l'absurde que pour toute f la suite $S_n(f)$ converge uniformément vers C_f. On pourra s'inspirer de l'exercice 1 du TD9 pour construire une mesure T-invariante différente de μ.

Exercice 4.— fractions continues

Soit $\mathrm{X} = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, et T l'action sur X qui à x associe la partie fractionnaire de $1/x$, soit

$$\mathrm{T}(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor =: \left\{ \frac{1}{x} \right\}.$$

1. Montrer que la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité $1/(1+x)$ est invariante pour T, et en déduire une mesure de probabilité μ invariante pour T.
2. A tout $x \in \mathrm{X}$, on associe la suite

$$(a_n(x))_{n\geq 1} = \left(\left\lfloor \frac{1}{\mathrm{T}^{n-1}(x)} \right\rfloor \right)_{n\geq 1}.$$

   Montrer qu'on définit ainsi un isomorphisme de X sur son image dans $(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$. Quelle est l'action sur $(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ associée ?

   Remarque : pour $n \geq 1$, on peut vérifier que l'on a

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{\ddots\, \cfrac{}{a_n(x) + \mathrm{T}^n(x)}}}}.$$

   La suite $(a_n(x))_{n\geq 1}$ est le développement en fraction continue de x.
3. On admet que μ est ergodique pour T. Montrer que pour presque tout x, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, le nombre de j apparaissant dans le développement en fraction continue de x a une fréquence asymptotique égale à

$$\frac{2\ln(1+j) - \ln j - \ln(2+j)}{\ln 2}.$$