TD 11 : Révisions

Dire (en justifiant bien sûr...) si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soit (X, μ) un espace mesuré, et soit $\mathrm{L}^0(\mathrm{X}, \mu)$ l'espace des fonctions mesurables sur X, quotienté par la relation d'égalité μ-presque partout. Il existe une distance sur $\mathrm{L}^0(\mathrm{X}, \mu)$ qui métrise la convergence presque partout.
2. Soit (X, μ) un espace mesuré, et soit $p,\ q \in [1, +\infty[$. On suppose que (f_n) est une suite de fonctions qui converge vers une fonction f dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu)$, et que de plus $|f_n|$ est dominée par une fonction $g \in \mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \mu)$. Alors f est dans $\mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \mu)$ et f_n tend vers f dans $\mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \mu)$.
3. Soient (X, μ) un espace mesuré, et f et $(f_n)_{n\geq 0}$ des fonctions mesurables sur X. Alors :
   (a) Si la suite (f_n) converge presque partout vers f, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu(\sup_{k\geq n} |f_k - f| \geq \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
   (b) La réciproque de (a) est vraie.
   (c) Les deux affirmations (a) et (b) sont vraies sous l'hypothèse que μ est une mesure finie.
4. La relation $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt}dt$ $(x > 0)$ permet de calculer
$$\lim_{\mathrm{A}\to\infty} \int_0^{\mathrm{A}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$
5. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction radiale (au sens où $f(x) = \mathrm{F}(\|x\|_2)$) c'est aussi le cas de sa transformée de Fourier $\hat{f}$.
6. Soient $\mathrm{S}, \mathrm{T} > 0$ tels que S/T soit irrationnel. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable S-périodique et T-périodique. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = c$ presque partout.
7. L'ergodicité est une notion stable par produit direct : si T agit ergodiquement sur un espace (X, μ) et S agit ergodiquement sur (Y, ν), alors l'action $\mathrm{S}\times\mathrm{T}$ sur $(\mathrm{X}\times\mathrm{Y}, \mu\otimes\nu)$ donnée par $(\mathrm{S} \times \mathrm{T})(x, y) = (\mathrm{S}x, \mathrm{T}y)$ est ergodique.
8. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ la translation T_α définie par $\mathrm{R}_{\alpha_1} \times \mathrm{R}_{\alpha_2} \times \cdots \times \mathrm{R}_{\alpha_d}$ est ergodique ssi les α_i sont tous irrationnels. Si cette assertion est fausse, donner un critère assurant l'ergodicité de T_α.
9. La question 2 de l'exercice 6 du TD9 reste vraie sans l'hypothèse d'inversibilité de T. A savoir, si (X, T) est un système dynamique et μ est une mesure de probabilité ergodique pour T, alors toute mesure de probabilité absolument continue par rapport à μ et invariante pour T est égale à μ.
10. (a) Le quadruplement de l'angle sur le cercle $\mathrm{T}_4 : x \mapsto 4x \bmod 1$ est isomorphe au système produit $\mathrm{T}_2 \times \mathrm{T}_2$ sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, où T_2 est le doublement de l'angle sur le cercle.
    (b) Le doublement de l'angle T_2 est isomorphe à une rotation R_α pour un α bien choisi.