Corrigé TD 8

Exercice 2.— Sous-espaces de L^2 invariants par translation

Un sous-espace K de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est dit invariant par translation si pour toute fonction $f \in \mathrm{K}$ et tout $h \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_h f = f(\cdot - h)$ est aussi dans K.

1. Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$, un sous-ensemble mesurable et soit $\mathrm{K_A} \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{L}^2$ telles que $\hat{f}(x) = 0$, pour presque tout $x \in \mathrm{A}$. Montrer que K est un sous-espace fermé de L^2, qui est invariant par translation.
2. On va montrer que tout sous-espace fermé invariant par translation $\mathrm{K} \subset \mathrm{L}^2$ est égal à $\mathrm{K_A}$ pour un cetain $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$. Notons $\hat{\mathrm{K}} \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ l'image de K par la transformée de Fourier.
   (a) Justifier que $\hat{\mathrm{K}}$ est fermé. Soit P la projection orthogonale sur $\hat{\mathrm{K}}$.
   (b) Montrer que pour toutes $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la fonction $(f - \mathrm{P}(f))\overline{\mathrm{P}(g)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ a une transformée de Fourier nulle. En déduire que $f\mathrm{P}(g) = \mathrm{P}(f)g$.
   (c) Montrer qu'il existe donc une fonction mesurable φ telle que pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,
   $$\mathrm{P}(f) = \varphi f.$$
   (d) Conclure.
3. Quand a-t'on $\mathrm{K_A} = \mathrm{K_B}$?

Corrigé :

1. Comme la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est une isométrie (donc continue et linéaire), $\mathrm{K_A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathrm{A}^c} \cdot \mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$ est bien un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De plus, pour $f \in \mathrm{K_A}$, $h \in \mathbb{R}$, on a pour presque tout $x \in \mathrm{A}$
$$\widehat{\tau_h f}(x) = e^{-ixh}\hat{f}(x) = 0. \tag{1}$$
Donc $\mathrm{K_A}$ est bien invariant par translation.

2.a. Comme K est fermé c'est aussi le cas de $\hat{\mathrm{K}}$ puisque $\mathcal{F}$ est une isométrie.

2.b. Soient $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Notons d'abord que $(f - \mathrm{P}(f))\overline{\mathrm{P}(g)}$ est bien un élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $h \in \mathbb{R}$. Comme K est invariant par translation, la relation (1) montre que $\hat{\mathrm{K}}$ est invariant par multiplication par la fonction $x \mapsto e^{-ihx}$. Ainsi la fonction $x \mapsto \mathrm{P}(g)(x)e^{-ixh}$ est dans $\hat{\mathrm{K}}$. Or par définition de P, $f - \mathrm{P}(f)$ est orthogonal à $\hat{\mathrm{K}}$. Donc
$$0 = \int_{\mathbb{R}} (f - \mathrm{P}(f))(x)\overline{\mathrm{P}(g)(x)e^{-ixh}}dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}((f - \mathrm{P}(f))\overline{\mathrm{P}(g)}).$$
Mais alors la fonction $(f - \mathrm{P}(f))\overline{\mathrm{P}(g)}$ est nulle et c'est donc aussi le cas de $(f - \mathrm{P}(f))\mathrm{P}(g)$. On obtient donc la relation $f\mathrm{P}(g) = \mathrm{P}(f)\mathrm{P}(g)$. Cette dernière expression étant symétrique en f et g, nous obtenons bien $f\mathrm{P}(g) = g\mathrm{P}(f)$.

2.c. Choisissons pour $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ une fonction qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par exemple $g(x) = e^{-x^2}$. D'après la question précédente, nous avons pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

$$\mathrm{P}(f) = \varphi f,$$

en posant $\varphi = \mathrm{P}(g)/g$ qui est bien mesurable.

2.d. Comme P est une projection, elle vérifie $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ qui conduit à $\varphi^2 = \varphi$ presque partout. Ainsi, φ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 (presque partout) : elle coïncide avec la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable $\mathrm{A}^c \subset \mathbb{R}$, et $\hat{\mathrm{K}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}^c} \cdot \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Finalement nous avons montré que $\mathrm{K} = \mathrm{K}_\mathrm{A}$.

Corrigé TD 9

Exercice 3.— Ergodicité des rotations irrationnelles : Une autre preuve

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et T la rotation d'angle α sur le cercle $\mathrm{X} = \mathbb{S}_1$, muni de la mesure de Lebesgue normalisée. Nous allons donner une autre preuve de l'ergodicité de T.

1. Supposons que $\mathrm{I} \subset \mathrm{X}$ est un intervalle de mesure $1/k$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des entiers $n_1 = 0, n_2, \cdots, n_k$ tels que $\mu(\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{I}) \cap \mathrm{T}^{n_j}(\mathrm{I})) \leq \varepsilon$ pour tous $i \neq j$, et

$$\mu(\cup_{i=1}^k \mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{I})) \geq 1 - \varepsilon.$$

2. Montrer que T est ergodique. On pourra penser aux points de Lebesgue.

Corrigé :

1. On va montrer le résultat pour $\varepsilon < 1$ (le résultat étant trivial pour $\varepsilon \geq 1$). On sait que l'ensemble $\{\alpha n, n \geq 0\}$ est dense dans $\mathbb{S}_1$. Soient donc $n_1 = 0$ et $n_2, \ldots, n_k$ tels que αn_i est à distance au plus $\varepsilon/(2k)$ de $(i-1)/k$. Alors il est facile de voir que les intervalles $\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{I})$ sont tous de mesure $1/k$, et que l'intersection de deux d'entre eux (distincts) $\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{I})$ et $\mathrm{T}^{n_j}(\mathrm{I})$ est de mesure au plus ε/k si $|j-i| = 1$ ou $\{i,j\} = \{1,k\}$, et est nulle sinon. Par conséquent, on a

$$\sum_{i<j} \mu(\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{I}) \cap \mathrm{T}^{n_j}(\mathrm{I})) \leq \varepsilon. \tag{2}$$

On en déduit

$$\mu(\cup_{i=1}^k \mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{I})) \geq \sum_{i=1}^k \mu(\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{I})) - \sum_{i<j} \mu(\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{I}) \cap \mathrm{T}^{n_j}(\mathrm{I})) \geq 1 - \varepsilon.$$

Les entiers $n_1, \ldots, n_k$ conviennent.

2. Rappelons que T préserve μ. Soit A un borélien de mesure strictement positive. On va montrer
$$\mu(\cup_{i\geq 1}\mathrm{T}^{-i}(\mathrm{A}))=1,$$
ce qui prouvera l'ergodicité. Mais on a
$$\begin{aligned}\mu(\cup_{i\geq 1}\mathrm{T}^{-i}(\mathrm{A})) &= \lim_{n\to\infty}\mu(\cup_{i=1}^{n}\mathrm{T}^{-i}(\mathrm{A}))\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu(\mathrm{T}^{-n}(\cup_{i=0}^{n-1}\mathrm{T}^{i}(\mathrm{A}))=\lim_{n\to\infty}\mu(\cup_{i=0}^{n-1}\mathrm{T}^{i}(\mathrm{A}))\\ &= \mu(\cup_{i\geq 0}\mathrm{T}^{i}(\mathrm{A}))\end{aligned}$$
de sorte qu'il suffit de prouver $\mu(\cup_{i\geq 0}\mathrm{T}^{i}(\mathrm{A}))=1$. Dans la deuxième ligne, on a utilisé successivement le caractère inversible de T et le fait qu'elle préserve la mesure.
Inspiré par l'énoncé, on choisit x un élément de A qui est aussi un point de Lebesgue de l'indicatrice $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$. Notons que cela est possible car les points de Lebesgue sont denses sur le cercle et $\mu(\mathrm{A})>0$. Soit $\eta>0$ quelconque. Pour k suffisamment grand et $\mathrm{I}=[x-1/(2k),x+1/(2k)]$, on a $\mu(\mathrm{A}\cap\mathrm{I})\geq(1-\eta)\mu(\mathrm{I})$. Maintenant, soit $\varepsilon>0$ quelconque et $n_1,\dots,n_k$ donnés par la première question, et tels que (1) soit vérifiée. Alors on a d'une part
$$\sum_{i=1}^{k}\mu(\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{A}\cap\mathrm{I}))\geq 1-\eta,$$
d'autre part
$$\sum_{i<j}\mu(\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{A}\cap\mathrm{I})\cap\mathrm{T}^{n_j}(\mathrm{A}\cap\mathrm{I}))\leq\varepsilon,$$
et par conséquent
$$\mu(\cup_{i=1}^{k}\mathrm{T}^{n_i}(\mathrm{A}\cap\mathrm{I}))\geq 1-\eta-\varepsilon.$$
En particulier $\mu(\cup_{i\geq 0}\mathrm{T}^{i}(\mathrm{A}))\geq 1-\eta-\varepsilon$, et comme $\eta>0$ et $\varepsilon>0$ étaient arbitraire, on conclut bien $\mu(\cup_{i\geq 0}^{n}\mathrm{T}^{i}(\mathrm{A}))=1$.

Exercice 6.— Mesures invariantes et ergodicité

1. Un système dynamique peut-il avoir plusieurs mesures de probabilité invariantes ? Si oui, l'action peut-elle être ergodique pour une mesure et non ergodique pour une autre ? On pourra penser au doublement de l'angle sur le cercle.
2. Soit X compact et $\mathrm{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ mesurable inversible, d'inverse mesurable. On suppose qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ ergodique pour T, et une autre mesure de probabilité borélienne ν, absolument continue par rapport à μ, et invariante pour T. Montrer que $\mu=\nu$.

Corrigé :

1. Les réponses aux deux questions sont positives. Un système dynamique peut avoir plusieurs mesures de probabilité invariantes, et être ergodique pour l'une et non ergodique pour l'autre. Comme suggéré dans l'énoncé, prenons le cercle $\mathbb{S}_1$ et T le doublement de l'angle. On sait d'après le cours que la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{S}_1$ est une

mesure de probabilité invariante et ergodique. Maintenant, soit $\mathrm{X} := \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ une orbite périodique de période n, au sens où les x_i, $0 \leq i \leq n-1$, sont distincts, et $\mathrm{T}^{np+q}x_0 = x_q$ pour $p \geq 0$ et $0 \leq q \leq n-1$. De telles orbites périodiques existent, par exemple on peut prendre $\{0\}$, orbite de période 1, ou $\{1/3, 2/3\}$, orbite de période 2. Soit μ la mesure uniforme sur X. Il est facile de vérifier que μ est invariante et ergodique pour T. L'invariance découle de ce que pour A borélien, $Card(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{A} \cap \mathrm{X}) = Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{X})$. L'ergodicité découle de ce que si A contient un élément de X et $\mathrm{T}^{-}1\mathrm{A} = \mathrm{A}$, alors A contient tous les éléments de X et $\mu(\mathrm{A}) = 1$.

Il s'agit maintenant de trouver une mesure de probabilité invariante mais non ergodique. N'importe quelle combinaison convexe non triviale de λ et de μ convient, par exemple $\nu = (\lambda + \mu)/2$. En effet, ν hérite clairement de la propriété d'invariance car pour A borélien,

$$2\nu(\mathrm{T}^{-}1(\mathrm{A})) = \lambda(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A})) + \mu(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A})) = \lambda(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{A}) = 2\nu(\mathrm{A}),$$

mais pas de la propriété d'ergodicité puisque l'ensemble dénombrable $\mathrm{Y} = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{T}^{-n}(\mathrm{X})$ vérifie $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Y}$ et $\nu(\mathrm{Y}) = 1/2$.

Remarques : Les mesures λ et μ peuvent être obtenues par la méthode donnée dans la question 1, mais pas ν. Par ailleurs, il existe des exemples plus simples sur le système dynamique du cercle et des rotations rationnelles. En effet, on sait que la mesure de Lebesgue est invariante mais non ergodique. Or, pour les mêmes raisons que précédemment, une mesure uniforme sur une unique orbite est automatiquement invariante et ergodique.

2. Soit f la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ. Soit h une fonction borélienne positive quelconque. L'invariance de μ nous donne

$$\int hf\mathrm{d}\mu = \int (h \circ \mathrm{T})(f \circ \mathrm{T})\mathrm{d}\mu,$$

tandis que celle de ν nous donne

$$\int hf\mathrm{d}\mu = \int h\mathrm{d}\nu = \int (h \circ \mathrm{T})\mathrm{d}\nu = \int (h \circ \mathrm{T})f\mathrm{d}\mu.$$

Ainsi, on a

$$\int (h \circ \mathrm{T})(f \circ \mathrm{T})\mathrm{d}\mu = \int (h \circ \mathrm{T})f\mathrm{d}\mu$$

pour toute fonction borélienne positive h, et donc aussi

$$\int g(f \circ \mathrm{T})\mathrm{d}\mu = \int gf\mathrm{d}\mu$$

pour toute fonction borélienne positive g (en appliquant la formule précédente à $h = g \circ \mathrm{T}^{-1}$). Ainsi $f \circ \mathrm{T}$ et f sont égales $\mu-$presque partout. Par l'ergodicité de μ, on en déduit que f est constante $\mu-$presque partout. Comme ν est une mesure de probabilité, cette constante est nécessairement 1 et $\mu = \nu$.