
TD 0 : Convergence de fonctions mesurables

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu[X]$ fini. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles mesurables.

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge en mesure* vers f si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu \left[\left\{ x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \right\} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge presque partout* vers f si

$$\left\{ x \in X \mid f_n(x) \text{ ne converge pas vers } f(x) \right\} \text{ est négligeable (pour } \mu \text{).}$$

Si les f_n et f sont dans L^p , $1 \leq p < \infty$, on dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge en norme L^p* vers f si

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 1.— Convergence en mesure

- (a) Montrer qu'en général, la convergence en mesure n'implique ni la convergence en norme L^p , ni la convergence presque partout.
- (b) En utilisant le lemme de Borel–Cantelli, montrer que si (f_n) converge vers f en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge vers f presque partout.
- (c) On note $L^0(X, \mu)$ l'espace des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ -presque partout. Montrer que sur cet espace, la fonction suivante est une distance et qu'elle métrise bien la convergence en mesure :

$$\delta(f, g) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \mu[|f - g| > \varepsilon] \leq \varepsilon \right\}.$$

- (d) En utilisant le lemme de Borel–Cantelli, montrer que $(L^0(X, \mu), \delta)$ est complet.

Exercice 2.— Convergence presque partout

- (a) Montrer que si (f_n) converge vers f μ -presque partout, alors (f_n) converge vers f en mesure.
- (b) Montrer qu'en général, il n'existe pas de distance sur $L^0(E, \mu)$ qui métrise la convergence μ -presque partout.

Exercice 3.— Convergence en norme L^p

On suppose dans tout cet exercice que (f_n) converge en norme L^p ($p < \infty$) vers f .

- (a) Montrer que (f_n) converge en mesure vers f .
- (b) Montrer qu'on peut extraire un sous-suite de (f_n) qui converge vers f presque partout.

TD 1 : Théorème de Fubini

Exercice 1.— tribu produit

Montrer que la tribu borélienne complétée sur $\mathbb{R}^2$ (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$) contient strictement le produit des tribus boréliennes complétées sur $\mathbb{R}$ (chacune par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

On pourra penser à introduire une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme $A \times B$, où A est une partie négligeable de $\mathbb{R}$ et B une partie non mesurable.

Exercice 2.— Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Soit $\Delta := \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$

Exercice 3.— calculs d'intégrales

1. Soit $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y)$ et $\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y)$. Cela contredit-il le théorème de Fubini ?

2. En introduisant la fonction $(x, y) \mapsto 1/(1+y)(1+x^2y)$ définie sur $\mathbb{R}_+^2$, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx.$$

Exercice 4.— Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et $f : (E, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable. Soit encore $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante de classe C^1 telle que $g(0) = 0$. Montrer que $\int_E g \circ f d\mu = \int_0^\infty g'(t) \mu(\{f \geq t\}) dt$.
Application : Pour f fonction positive, on a

$$\int_E f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) dt,$$

l'intégrale par rapport à μ s'exprime donc encore comme intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5.— Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$. Soient f et g deux fonctions monotones de même sens dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, telles que fg est aussi dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\int fg d\mu \geq \int f d\mu \int g d\mu.$$

On pourra penser à introduire la fonction $F(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Exercice 6.— Soit $f :]0, 1[^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue bidimensionnelle. La fonction $x \mapsto \int f(x, y) dy$ peut-elle prendre des valeurs infinies ? Si oui, donner un exemple, et si non, le démontrer.

TD 2 : Convolution

Exercice 1.— Densité dans L^p

1. Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$) et φ une fonction de classe C^∞ à support compact. Montrer que la fonction $f * \varphi$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^∞ .
2. Soit $\varphi : x \mapsto \exp(-\frac{1}{1-x^2})\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$. Montrer que cette fonction est de classe C^∞ et à support compact.
3. En déduire que pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ est dense dans L^p .

Exercice 2.— Convolution $L^p - L^q$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, où $p \geq 1$ et q est l'exposant conjugué de p .

1. Montrer que si $p > 1$ alors

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0.$$

2. Est-ce encore vrai si $p = 1$ et $q = +\infty$? Et si l'on suppose que $g(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$?

Exercice 3.— L'algèbre de Banach L^1

On rappelle qu'une algèbre de Banach $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre A , qui est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|$, et qui vérifie

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|, \forall x, y \in A.$$

Montrer que le produit de convolution sur L^1 en fait une algèbre de Banach commutative. Montrer que cette algèbre ne possède pas d'unité.

Indication : On pourra utiliser la convolution par la fonction $\mathbf{1}_{[0,1]}$.

Exercice 4.— convolution $L^1 - L^p$

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, où $p \in]1, \infty[$. Montrer que la fonction $f * g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$, et que

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Indication : On pourra écrire $|f(x-y)g(x)| = |f(x-y)|^{1/q} |f(x-y)|^{1/p} |g(y)|$, où q est l'exposant conjugué de p .

Exercice 5.— Le Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

Le Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov fournit un critère effectif pour déterminer si un ensemble de fonctions dans L^p est relativement compact dans L^p . C'est donc l'analogie dans le cadre L^p du Théorème d'Ascoli rappelé ci-dessous :

Théorème (Ascoli). Soient X, Y deux espaces métriques compacts. Soit $C(X, Y)$ l'espace des fonctions continues $f : X \rightarrow Y$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors une partie bornée $A \subset C(X, Y)$ est d'adhérence compacte si elle est uniformément *équi-continue* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow \forall f \in A, d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon).$$

Voici le théorème que nous allons montrer. La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert dont l'adhérence $\bar{\omega}$ est compacte et contenue dans Ω .

Théorème (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^p(\Omega)$, avec $p \in [1, \infty[$. On suppose que :

- (i) Les fonctions de $\mathcal{F}$ ne se concentrent pas sur le bord de Ω :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \omega \subset\subset \Omega, \text{ tq } \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon.$$

- (ii) $\mathcal{F}$ est équi-continue au sens L^p :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \subset\subset \Omega, \exists \delta \in]0, d(\omega, \Omega^c)[, \text{ tq } |h| \leq \delta \Rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

Alors $\mathcal{F}$ est d'adhérence compacte dans $L^p(\Omega)$.

Comme pour le théorème d'Ascoli, la preuve de ce théorème repose sur le critère de compacité bien connu suivant :

Proposition. Soit (E, d) un espace métrique complet. Une partie $A \subset E$ est d'adhérence compacte si et seulement si elle est pré-compacte : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des parties de diamètre $\leq \varepsilon$.

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $(\rho_n)_{n \geq 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et de support inclus dans $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}$ par 0. Montrer à l'aide du théorème d'Ascoli, que pour tout $n \geq 1$, la famille $\mathcal{F}_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)|_\omega, f \in \mathcal{F}\}$ est d'adhérence compacte dans $L^p(\omega)$.
2. Montrer que pour n assez grand,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

3. En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}|_\omega$ est pré-compact.
4. Conclure la preuve du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Pour terminer, voici une application (de la question 3) :

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour ω ouvert borné de $\mathbb{R}$, on définit

$$\mathcal{G}_\omega = \{(f \star g)|_\omega, f \in \mathcal{F}\}.$$

Montrer que $\mathcal{G}_\omega$ est d'adhérence compacte dans $L^p(\omega)$.

TD 3 : Dualité $L^p - L^q$

Exercice 1.— Convergence faible

Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue λ . Soit (f_n) une suite bornée de $L^p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $L^q(\mathbb{R})$ est séparable, *i.e.* qu'il contient une partie dénombrable dense.
2. Notons donc D une partie dénombrable dense de $L^q(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $g \in D$,

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_{\varphi(n)} g d\lambda, \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

3. Montrer que cette limite existe en fait pour tout $g \in L^q(\mathbb{R})$.
4. En déduire qu'il existe $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que l'on ait convergence faible dans $L^p(\mathbb{R})$ de la suite $(f_{\varphi(n)})$ vers f , *i.e.*

$$\forall g \in L^q(\mathbb{R}), \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_{\varphi(n)} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f g d\lambda.$$

Nous venons en fait de montrer que la boule unité de L^p munie de la topologie faible est compacte¹. C'est un cas particulier du théorème de Banach-Alaoglu.

Exercice 2.— Continuité automatique

Soit (X, μ) un espace mesuré σ -fini, $p \in [1, +\infty[$, et q son exposant conjugué. Soit $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour toute fonction $f \in L^p(X)$, on ait $f\psi \in L^1(X)$. On veut montrer que $\psi \in L^q(X)$.

Pour cela notons Φ_ψ la forme linéaire sur $L^p(X)$ donnée par

$$\Phi_\psi(f) = \int_X f\psi d\mu, \quad f \in L^p.$$

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de sous-ensembles mesurables de X , telle que $X = \cup_n X_n$, et $\mu(X_n) < \infty$ pour tout n . Pour tout $n \geq 0$, notons $Y_n = \{x \in X_n | \psi(x) \leq n\}$ et posons pour $f \in L^p(X)$, $\Phi_n(f) = \int_{Y_n} f\psi d\mu$.

1. Montrer que Φ_n est une forme linéaire continue pour tout n , et que la suite (Φ_n) converge simplement vers Φ_ψ .
2. Dédurre du théorème de Banach-Steinhaus que Φ_ψ est continue.
3. Conclure.

1. En fait nous avons seulement montré le critère de Bolzano Weierstrass. Ce critère n'assure la compacité que dans le cas d'un espace métrique. Nous admettons que la boule unité de $L^p(\mathbb{R})$ munie de la topologie faible est métrisable.

Exercice 3.— Prédual de L^1 , cas atomique

1. Rappeler pourquoi ℓ^1 n'est pas le dual de ℓ^∞ .
2. Montrer que ℓ^1 est le dual de c_0 , l'ensemble des fonctions qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|(x_n)\| = \sup |x_n|$.
3. Plus généralement, si μ est une mesure σ -finie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, donner un espace dont $L^1(\mathbb{N}, \mu)$ est le dual.
4. Considérons le cas non σ -fini suivant : $X = \{0, 1\}$ et μ est la mesure sur $\mathcal{P}(X)$ définie par $\mu(\{0\}) = 1$, $\mu(\{1\}) = +\infty$. Comparer $L^\infty(X, \mu)$ et le dual topologique de $L^1(X, \mu)$.

Exercice 4.— Prédual de L^1 , cas diffus

Soit C un convexe dans un espace vectoriel. Un point $x \in C$ est dit *extrémal* (dans C) s'il ne peut pas s'écrire sous la forme $x = (x_1 + x_2)/2$ avec $x_1, x_2 \in C$, $x_1, x_2 \neq x$.

En combinant le théorème de Banach-Alaoglu avec un théorème dû à Krein et Milman, on peut montrer la propriété suivante :

Proposition. Soit E un espace vectoriel normé, et E' son dual topologique. Alors la boule unité K de E' a des points extrémaux (et est en fait égale à l'adhérence de l'enveloppe convexe des ses points extrémaux).

On munit $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue. Montrer en utilisant la proposition ci-dessus que $L^1([0, 1])$ n'est pas le dual d'un espace vectoriel normé.

TD 4 : Changement de variable

Exercice 1.— Echauffement

1. A partir de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx dy,$$

calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Calculer l'intégrale (par rapport à la mesure de Lebesgue)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\langle Ax, x \rangle) dx.$$

Exercice 2.— Intégrabilité des fonctions puissances dans $\mathbb{R}^d$. Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, nulle en 0, et définie ailleurs par

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = r^{-\alpha},$$

où l'on a posé $r(x_1, \dots, x_d) = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$. Pour quels α la fonction f est-elle intégrable en dehors d'un voisinage de 0 ? En dehors d'un voisinage de $+\infty$?

Exercice 3.— Une once de calculs...

1. Soit D le domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, x \vee \frac{1}{x} \leq y \leq 3x \wedge \frac{3}{x}\}$. Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ sur D par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \sqrt{|yz|} + \sqrt{|xz|} + \sqrt{|xy|} \leq 1\}$. Calculer le volume de D .

Exercice 4.— Formule des compléments On note Γ la fonction définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Soient $a, b > 0$.

1. Calculer la mesure image de la mesure

$$x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbf{1}_{\{x, y \geq 0\}} dx dy$$

par l'application $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (x + y, x/(x + y))$.

2. En déduire la formule des compléments

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

Exercice 5.— Théorème de Sard

Soit $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $S = \{x \in \Omega, \text{Jac}_f(x) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de f . On veut montrer que l'ensemble $C = f(S)$ des *valeurs critiques* de f est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer qu'il suffit de prouver l'énoncé suivant : *Soit $Q \subset \Omega$ un cube compact. La mesure de $f(S \cap Q)$ est nulle.* ;
2. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $h > 0$ tel que pour tout $x, y \in Q$,

$$\|x - y\|_\infty \leq h \rightarrow \|Df(x) - Df(y)\| \leq \varepsilon.$$

- (i) Justifier que h existe ;
 - (ii) Pour $a \in Q \cap C$, soit $Q_h \subset Q$ un cube de côté h contenant a . Montrer que la mesure de $f(Q_h)$ est majorée par $\alpha \varepsilon h^d$, où α est une constante indépendante de ε .
3. Conclure.

Application : Soient U et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et $\varphi : U \rightarrow D$ une fonction bijective de classe C^1 . Montrer que pour toute fonction borélienne $f : D \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_D f(x) dx = \int_U f(\varphi(u)) |\text{Jac}_\varphi(u)| du.$$

Exercice 6.— mesures de Lebesgue sur les sphères unités.

Dans tout cet exercice, λ_{S^d} désignera la mesure de Lebesgue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^{d+1}$, et $A_d = \lambda_{S^d}(S^d)$ désignera son "volume".

1. Soit μ_d la mesure sur $S^{d-1} \times (-1, 1)$ absolument continue par rapport à $\lambda_{S^{d-1}} \otimes \lambda$, et de densité $f(\omega, y) = (1 - y^2)^{(d/2-1)}$. Soit $\Psi : S^{d-1} \times (-1, 1) \rightarrow S^d$ définie par $\Psi(\omega, y) = ((1 - y^2)^{1/2}\omega, y)$.
 - (a) Montrer que pour $F \in C_c(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{(0, \infty)} r^d \left(\int_{S^{d-1} \times (-1, 1)} F(r\Psi(\omega, y)) \mu_d(d\omega \times dy) \right) dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times (-1, 1)} |x|(1 - y^2)^{(d/2-1)} F((1 - y^2)^{1/2}x, |x|y) dx dy, \end{aligned}$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $|x|$ la norme du vecteur x .

- (b) En utilisant un changement de variable approprié, montrer que cette dernière intégrale est aussi égale à l'intégrale de F sur $\mathbb{R}^{d+1}$. En déduire que λ_{S^d} est la mesure image de μ_d par Ψ .
2. On s'intéresse au comportement asymptotique de la mesure image de ν_d , la mesure image de $\frac{1}{A_d} \lambda_{S^d}$ par la première projection, quand d tend vers l'infini.

(a) Pour $f \in C_b(\mathbb{R})$ et $d \geq 1$, on note

$$I_d := \frac{1}{A_d} \int_{\mathbb{S}^d} f(z_1) \lambda_{\mathbb{S}^d}(dz).$$

Montrer que l'on a

$$I_d = \frac{A_{d-1}}{A_d \sqrt{d}} \int_{(-\sqrt{d}, \sqrt{d})} f\left(\frac{x}{\sqrt{d}}\right) \left(1 - \frac{x^2}{d}\right)^{\frac{d}{2}-1} dx.$$

(b) En déduire que ν_d converge étroitement vers le Dirac en 0. Montrer par contre que $\tilde{\nu}_d$, la mesure image de ν_d par la multiplication par $\sqrt{d}$, converge étroitement vers la mesure

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Vous attendiez-vous à un tel résultat ?

TD 5 : Dérivation au sens de Lebesgue

Exercice 1.— Dérivation des fonctions à variation bornées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à variation bornée si

$$\sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < +\infty,$$

le supremum étant pris sur toutes les suites finies $x_0 \leq \dots \leq x_n$. On cherche à montrer qu'une fonction à variation bornée est dérivable presque partout, et que sa dérivée est intégrable.

1. On suppose que f est croissante et continue à droite. Montrer alors le résultat.
2. Montrer que le résultat reste vrai sans l'hypothèse de continuité à droite.
3. Dans le cas général, montrer que f peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes, et conclure.

Indication : Dans la première question, on pourra penser à montrer à introduire et à différentier la mesure dont $f - \text{constante}$ est la fonction de répartition. Dans la dernière question, on pourra construire explicitement les deux fonctions, à l'aide de la fonction de variation totale $V_f(x) := \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, le sup étant pris seulement sur les suites telles que $x_0 \leq \dots \leq x_n \leq x$.

Exercice 2.— Intégration de la dérivée

I. On rappelle qu'une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout n et pour tous segments disjoints $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ inclus dans $[0, 1]$, on a

$$\sum_{i=1}^n y_i - x_i < \eta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et continue à droite telle que $f(0) = 0$. Soit f' sa dérivée, bien définie presque partout et intégrable, d'après l'exercice précédent. Montrer que l'on a

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt$$

pour tout $x \in [0, 1]$, si et seulement si f est absolument continue.

2. En déduire que toute fonction absolument continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie le Théorème Fondamental de l'intégration :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

II. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la fonction escalier de Cantor. On définit $g(x) = (x + f(x))/2$ et f^{-1} et g^{-1} les fonctions réciproques continues à droite de f et g , définies par

$$f^{-1}(x) := \inf\{y \geq 0, f(y) > x\} \quad \text{et} \quad g^{-1}(x) := \inf\{y \geq 0, g(y) > x\}.$$

Pour chacune de ces quatre fonctions, indiquer en quels points elle est continue, en quels points elle est dérivable, la valeur de sa dérivée, l'intégrale de la dérivée, et indiquer si elle est absolument continue.

Exercice 3.— Fonctions très (trop ?) périodiques

Soient $S, T > 0$ tels que S/T soit irrationnel. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable S -périodique et T -périodique. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = c$ presque partout. On pourra considérer les ensembles $\{f > a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$.

Aucune hypothèse de continuité n'est supposée! Noter que f peut être non constante malgré tout.

Exercice 4.— Un peu de bricolage La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ sera notée λ .

1. Soient $\alpha, \beta \in [0, 1]$, with $\alpha \geq \beta$. Construire un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap]-a, a[)}{2a} = \alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{a \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap]-a, a[)}{2a} = \beta.$$

2. Construire une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, monotone, qui ne soit constante sur aucun segment, mais pourtant $f'(x) = 0$ λ -presque partout.

Indication : il suffit de construire une mesure diffuse μ singulière par rapport à λ telle que $\mu(I) > 0$ pour tout ouvert I . Pourquoi ?

TD 6 : Pot-pourri

Exercice 1.— mesures de Lebesgue sur les sphères unités.

Dans tout cet exercice, λ_{S^d} désignera la mesure de Lebesgue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^{d+1}$, et $A_d = \lambda_{S^d}(S^d)$ désignera son “volume”.

1. Soit μ_d la mesure sur $S^{d-1} \times (-1, 1)$ absolument continue par rapport à $\lambda_{S^{d-1}} \otimes \lambda$, et de densité $f(\omega, y) = (1 - y^2)^{(d/2-1)}$. Soit $\Psi : S^{d-1} \times (-1, 1) \rightarrow S^d$ définie par $\Psi(\omega, y) = ((1 - y^2)^{1/2}\omega, y)$.

(a) Montrer que pour $F \in C_c(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{(0, \infty)} r^d \left(\int_{S^{d-1} \times (-1, 1)} F(r\Psi(\omega, y)) \mu_d(d\omega \times dy) \right) dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times (-1, 1)} |x|(1 - y^2)^{(d/2-1)} F((1 - y^2)^{1/2}x, |x|y) dx dy, \end{aligned}$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $|x|$ la norme du vecteur x .

- (b) En utilisant un changement de variable approprié, montrer que cette dernière intégrale est aussi égale à l'intégrale de F sur $\mathbb{R}^{d+1}$. En déduire que λ_{S^d} est la mesure image de μ_d par Ψ .
2. On s'intéresse au comportement asymptotique de ν_d , la mesure image de $\frac{1}{A_d} \lambda_{S^d}$ par la première projection, quand d tend vers l'infini.

(a) Pour $f \in C_b(\mathbb{R})$ et $d \geq 1$, on note

$$I_d := \frac{1}{A_d} \int_{S^d} f(z_1) \lambda_{S^d}(dz).$$

Montrer que l'on a

$$I_d = \frac{A_{d-1}}{A_d \sqrt{d}} \int_{(-\sqrt{d}, \sqrt{d})} f\left(\frac{x}{\sqrt{d}}\right) \left(1 - \frac{x^2}{d}\right)^{\frac{d}{2}-1} dx.$$

- (b) En déduire que ν_d converge étroitement vers le Dirac en 0. Montrer par contre que $\tilde{\nu}_d$, la mesure image de ν_d par la multiplication par $\sqrt{d}$, converge étroitement vers la mesure

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Vous attendiez-vous à un tel résultat ?

Exercice 2.— Points de Lebesgue et suites gentiment contractantes.

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une suite $(E_n)_n$ de boréliens de $\mathbb{R}^d$ se contracte gentiment en $x \in \mathbb{R}^d$ si on peut inclure, pour tout n , le borélien E_n dans une boule $B(x, r_n)$ centrée en x et de rayon strictement positif de sorte que :

$$\inf \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(B(x, r_n))} > 0 \quad \text{et} \quad r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. Soit $D\mu$ sa dérivée symétrique définie presque partout, et μ_s , singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, de sorte que pour tout borélien E , on a

$$\mu(E) = \mu_s(E) + \int_E D\mu(x) \lambda(dx).$$

Soit x un point où $D\mu$ est définie et tel que $D\mu_s(x) = 0$.

1. On suppose de plus que x est un point de Lebesgue de $D\mu$. Soit $(E_n)_n$ une suite de boréliens se contractant gentiment en x . Montrer que l'on a :

$$\frac{\mu(E_n)}{\lambda(E_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D\mu(x).$$

application : une fonction croissante et continue à droite est presque partout dérivable (de dérivée $D\mu(x)$).

2. On suppose que x n'est pas un point de Lebesgue de $D\mu$. Soit r_n une suite strictement décroissante tendant vers 0 telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(B(x, r_n))} \int_{B(x, r_n)} |D\mu(y) - D\mu(x)| \lambda(dy) > 0.$$

On introduit $F_n = \{y \in B(x, r_n), D\mu(y) \geq D\mu(x)\}$ et $G_n = \{y \in B(x, r_n), D\mu(y) \leq D\mu(x)\}$

- (a) Montrer que les deux limites supérieures

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(B(x, r_n))} \int_{F_n} |D\mu(y) - D\mu(x)| \lambda(dy)$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(B(x, r_n))} \int_{G_n} |D\mu(y) - D\mu(x)| \lambda(dy)$$

sont strictement positives.

- (b) Construire une suite $(E_n)_n$ se contractant gentiment en x telle que $\mu(E_n)/\lambda(E_n)$ n'a pas de limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.— Transformée de Fourier : un autre point de vue On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue divisée par $\sqrt{2\pi}$, notée m

1. Remonter à l'aide de la transformée de Fourier que $L^1(\mathbb{R})$, munie du produit de convolution, est une algèbre de Banach commutative sans unité.
2. Pour une algèbre de Banach A , une forme linéaire continue $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ est appelé un *caractère* si

$$\forall a, b \in A \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Soit φ un caractère de $L^1(\mathbb{R})$.

- (a) Justifier l'existence d'une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$.

- (b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi(f)g(y) = \varphi(\tau_y(f))$. En déduire que g coïncide presque partout avec une fonction continue et que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = g(x)g(y).$$

- (c) Montrer l'existence d'un $t \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) = e^{-itx}$, puis que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\varphi(f) = \varphi_t(f) := \hat{f}(t).$$

Ainsi on voit que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble X des caractères de $L^1(\mathbb{R})$. Si on munit X de la topologie faible-*, cette application est en fait un homéomorphisme. Ceci permet de donner une autre définition de la transformée de Fourier ; c'est l'application injective

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}, m) &\rightarrow C(X) \\ f &\mapsto \{\varphi \mapsto \varphi(f)\}. \end{aligned}$$

De manière analogue, on peut définir la transformée de Fourier sur des groupes abéliens plus généraux. Que donnerait par exemple la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}$? Sur $\mathbb{S}^1$?

TD 7 : Transformée de Fourier

Exercice 1.— Soit $f \in L^1$, $f > 0$. Montrer que $|\hat{f}(y)| < \hat{f}(0)$ pour tout $y \neq 0$.

Exercice 2.— Soient $\alpha > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, notons

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx \text{ et } F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2k\pi).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum \varphi(n) e^{inx}$.
2. Calculer $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et en déduire l'égalité

$$\frac{e^{2\pi\alpha} + 1}{e^{2\pi\alpha} - 1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice 3.— Le critère de Polya

Soit φ une fonction positive sur $\mathbb{R}$, paire, telle que $\varphi(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ et φ est décroissante convexe sur $\mathbb{R}_+$. On veut montrer que φ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité.

1. Montrer que pour tout $s > 0$, la fonction $\varphi_s : t \mapsto (1 - |\frac{t}{s}|)_+$ vérifie les hypothèses de l'énoncé, et est la transformée de Fourier de la fonction $f_s : x \mapsto \frac{1 - \cos(sx)}{\pi s x^2}$.
2. Montrer que φ admet une dérivée à droite φ' en tout point de $]0, +\infty[$. Montrer que φ' est continue à droite et croissante.
3. Notons μ une mesure positive sur $]0, +\infty[$ telle que $\mu([a, b]) = \varphi'(b) - \varphi'(a)$ pour tous $a < b \in]0, +\infty[$. Justifier que μ existe.
4. Soit ν la mesure donnée par $d\nu(s) = s d\mu(s)$. Montrer que pour $t > 0$, on a

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \varphi_s(t) d\nu(s).$$

En déduire que de plus ν est une mesure de probabilité. Ainsi nous avons écrit φ comme "combinaison convexe" des φ_t . Que reste-t'il à faire pour conclure ?

5. Application : Montrer que $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité. En fait ce résultat est aussi vrai si $\alpha < 2$.

Exercice 4.— Transformée de Fourier : un autre point de vue On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue divisée par $\sqrt{2\pi}$, notée m

1. Remonter à l'aide de la transformée de Fourier que $L^1(\mathbb{R})$, munie du produit de convolution, est une algèbre de Banach commutative sans unité.
2. Pour une algèbre de Banach A , une forme linéaire continue $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ est appelé un *caractère* si

$$\forall a, b \in A \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Soit φ un caractère de $L^1(\mathbb{R})$.

- (a) Justifier l'existence d'une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$.
- (b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi(f)g(y) = \varphi(\tau_y(f))$. En déduire que g coïncide presque partout avec une fonction continue et que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = g(x)g(y).$$

- (c) Montrer l'existence d'un $t \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) = e^{-itx}$, puis que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\varphi(f) = \varphi_t(f) := \hat{f}(t).$$

Ainsi on voit que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble X des caractères de $L^1(\mathbb{R})$. Si on munit X de la topologie faible-*, cette application est en fait un homéomorphisme. Ceci permet de donner une autre définition de la transformée de Fourier ; c'est l'application injective

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}, m) &\rightarrow C(X) \\ f &\mapsto \{\varphi \mapsto \varphi(f)\}. \end{aligned}$$

De manière analogue, on peut définir la transformée de Fourier sur des groupes abéliens plus généraux. Que donnerait par exemple la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}$? Sur $\mathbb{S}^1$?

TD 8

Exercice 1.— équi-intégrabilité

Soit μ une mesure finie sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. Un sous-ensemble Γ de $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est dit équi-intégrable (ou uniformément intégrable) si

$$\sup_{f \in \Gamma} \int_{\{|f| \geq a\}} |f| d\mu \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

1. Montrer qu'un ensemble fini est équi-intégrable.
2. Montrer qu'un ensemble équi-intégrable est toujours borné dans $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, mais que la réciproque n'est pas vraie.
3. Montrer qu'un ensemble borné dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ pour un $p > 1$ est équi-intégrable.
4. * Montrer qu'un sous-ensemble Γ de $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est équi-intégrable si et seulement si il existe une fonction positive mesurable G telle que $G(x)/x \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow \infty$, vérifiant

$$\sup_{f \in \Gamma} \int_E G(f) d\mu < \infty.$$

5. Montrer que si Γ est équi-intégrable alors elle est équi-continue, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{f \in \Gamma} \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

Montrer que la réciproque est vraie si Γ est de plus supposée bornée dans $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. On pourra remarquer par ailleurs que cela est toujours vérifié si μ est la mesure de Lebesgue sur un compact de $\mathbb{R}$.

6. Soit $(f_n, n \geq 1)$ une suite de $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. On suppose que f_n converge μ -presque partout vers f quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que f_n converge dans $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ vers f si et seulement si l'ensemble $\{f_n, n \geq 1\}$ est équi-intégrable.

Exercice 2.— Sous-espaces de L^2 invariants par translation

Un sous-espace K de $L^2(\mathbb{R})$ est dit invariant par translation si pour toute fonction $f \in K$ et tout $h \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_h f = f(\cdot - h)$ est aussi dans K .

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, un sous-ensemble mesurable et soit $K_A \subset L^2(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ telles que $\hat{f}(x) = 0$, pour presque tout $x \in A$. Montrer que K est un sous-espace fermé de L^2 , qui est invariant par translation.
2. On va montrer que tout sous-espace fermé invariant par translation $K \subset L^2$ est égal à K_A pour un certain $A \subset \mathbb{R}$. Notons $\hat{K} \subset L^2(\mathbb{R})$ l'image de K par la transformée de Fourier.
 - (a) Justifier que $\hat{K}$ est fermé. Soit P la projection orthogonale sur $\hat{K}$.

- (b) Montrer que pour toutes $f, g \in \hat{K}$, la fonction $(f - P(f))\overline{P(g)} \in L^1(\mathbb{R})$ a une transformée de Fourier nulle. En déduire que $fP(g) = P(f)g$.
- (c) Montrer qu'il existe donc une fonction mesurable φ telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$P(f) = \varphi f.$$

- (d) Conclure.
3. Quand a-t'on $K_A = K_B$?

Exercice 3.— Translations sur le tore

Soit $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ le tore de dimension d , où $d \geq 1$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^d$, on note

$$\begin{aligned} S_\alpha : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto x + \alpha. \end{aligned}$$

1. Montrer que S_α donne par passage au quotient une application $T_\alpha : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ bien définie.
2. Montrer que T_α est ergodique si et seulement si le $d + 1$ -uplet de réels $(1, \alpha)$ forme une famille libre du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. On pourra s'inspirer du cours.

TD 9 : Théorie ergodique

Exercice 1.— Mesure invariante ?

Soit X un espace topologique compact muni de la tribu des boréliens, et $T : X \rightarrow X$ mesurable. On se demande si l'on peut trouver une mesure sur X invariante pour T . On admettra que l'ensemble des mesures de probabilité sur X est un espace compact pour la topologie de la convergence étroite.

1. Soit $x_0 \in X$ et, pour $n \geq 1$, soit

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x_0}.$$

Justifier qu'il existe mesure de probabilité μ sur X et une suite extraite $(\mu_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge étroitement vers μ .

2. Vérifier que la suite $(T_* \mu_{n_k})$ converge encore vers μ .
3. Si T est continue, montrer que μ est invariante pour T . Donc toute transformation continue de X admet une mesure de probabilité invariante.
4. Sur $X = [0, 1]$, on définit T par $T(x) = x/2$ si $x > 0$ et $T(0) = 1$. Montrer qu'il n'existe pas de mesure invariante pour T .

Quelques systèmes dynamiques

Exercice 2.— Décalage de Bernoulli : Plusieurs avatars

Considérons les trois espaces de probabilité (X, λ) , (Y, μ) et (Z, ν) suivants.

(X, λ) est le cercle muni de la mesure de Lebesgue, $(Y, \mu) = \prod_{n \geq 0} (Y_0, \mu_0)$ où μ_0 est la mesure sur $Y_0 = \{0, 1\}$ définie par $\mu_0(\{0\}) = \mu_0(\{1\}) = 1/2$ et $(Z, \nu) = (\mathbb{R}, \frac{1}{\pi(1+x^2)} d\lambda)$.

Montrer que les systèmes dynamiques suivants préservent bien la mesure de probabilité correspondante, et qu'ils sont deux à deux isomorphes.

1. Le doublement de l'angle sur le cercle

$$T_1 : x \in X \mapsto 2x \in X.$$

2. Le *décalage de Bernoulli* défini sur (Y, μ) par

$$T_2 : (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

3. L'application $T_3 : (Z, \nu) \rightarrow (Z, \nu)$ définie par $T_3(0) = 0$ et

$$T_3 : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), \text{ si } x \neq 0.$$

En particulier, toutes ces transformations sont ergodiques.

Exercice 3.— Ergodicité des rotations irrationnelles : Une autre preuve

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et T la rotation d'angle α sur le cercle $X = \mathbb{S}_1$, muni de la mesure de Lebesgue normalisée. Nous allons donner une autre preuve de l'ergodicité de T .

1. Supposons que $I \subset X$ est un intervalle de mesure $1/k$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des entiers $n_1 = 0, n_2, \dots, n_k$ tels que $\mu(T^{n_i}(I) \cap T^{n_j}(I)) \leq \varepsilon$ pour tous $i \neq j$, et

$$\mu(\cup_{i=1}^k T^{n_i}(I)) \geq 1 - \varepsilon.$$

2. Montrer que T est ergodique. On pourra penser aux points de Lebesgue.

Exercice 4.— Action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le tore. Soit $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et $A \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Montrer que l'action de A sur $\mathbb{R}^2$ définit par passage au quotient une application bien définie sur X qui préserve la "mesure de Lebesgue sur le tore" (c'est à dire la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'identification $X \simeq]0, 1] \times]0, 1]$).

Réurrence et ergodicité

Exercice 5.— L'ergodicité est-elle une notion stable par produit direct ?

Si T agit ergodiquement sur un espace (X, μ) et S agit ergodiquement sur (Y, ν) , alors l'action $S \times T$ sur $(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ donnée par $(S \times T)(x, y) = (Sx, Ty)$ est-elle ergodique ?

Exercice 6.— Mesures invariantes et ergodicité

1. Un système dynamique peut-il avoir plusieurs mesures de probabilité invariantes ? Si oui, l'action peut-elle être ergodique pour une mesure et non ergodique pour une autre ? On pourra penser au doublement de l'angle sur le cercle.
2. Soit X compact et $T : X \rightarrow X$ mesurable inversible, d'inverse mesurable. On suppose qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ ergodique pour T , et une autre mesure de probabilité borélienne ν , absolument continue par rapport à μ , et invariante pour T . Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 7.— Transitivité presque sûre

Soit X un espace métrique compact, et $T : X \rightarrow X$ une application mesurable. On suppose qu'il existe une mesure (borélienne) de probabilité μ qui est T -ergodique. Montrer que pour μ -presque tout $x \in X$, pour tout $y \in \text{supp}(\mu)$, il existe une suite d'entiers $(n_k)_k$ qui tend vers l'infini telle que $T^{n_k}(x) \rightarrow y$.

TD 10 : Théorie ergodique

Exercice 1.— Echauffement

Soit (X, μ) un espace mesuré, et $T : X \rightarrow X$ une application mesurable inversible, d'inverse mesurable, préservant μ . Montrer que pour tout $f \in L^1(X)$, pour presque tout $x \in X$,

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(T^n x) = \lim_N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(T^{-n} x).$$

Exercice 2.— puissances de 2

Pour $1 \leq k \leq 9$, on note A_k l'ensemble des entiers $n \geq 0$ tels que le premier chiffre de l'écriture décimale de 2^n est k . L'ensemble A_k admet-il une fréquence asymptotique, et si oui, laquelle ?

Exercice 3.— unique ergodicité

Soit X un espace métrique compact, et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que T est *uniquement ergodique* s'il existe une unique mesure de probabilité Borélienne T -invariante sur X .

1. Montrer que pour α irrationnel, la rotation d'angle α sur le cercle est uniquement ergodique.
2. On suppose que pour toute fonction continue $f \in C(X)$, la somme de Birkhoff

$$S_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(T^n x)$$

converge vers une constante C_f , uniformément en $x \in X$ quand N tend vers l'infini. Montrer qu'alors T est uniquement ergodique.

3. On souhaite montrer la réciproque. Supposons donc T uniquement ergodique, et notons μ l'unique mesure T -invariante sur X .
 - (i) Montrer que μ est T -ergodique. Que doit valoir la constante C_f de la question 2 ?
 - (ii) Montrer en raisonnant par l'absurde que pour toute f la suite $S_n(f)$ converge uniformément vers C_f . On pourra s'inspirer de l'exercice 1 du TD9 pour construire une mesure T -invariante différente de μ .

Exercice 4.— fractions continues

Soit $X = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, et T l'action sur X qui à x associe la partie fractionnaire de $1/x$, soit

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor =: \left\{ \frac{1}{x} \right\}.$$

1. Montrer que la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité $1/(1+x)$ est invariante pour T , et en déduire une mesure de probabilité μ invariante pour T .
2. A tout $x \in X$, on associe la suite

$$(a_n(x))_{n \geq 1} = \left(\left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor \right)_{n \geq 1}.$$

Montrer qu'on définit ainsi un isomorphisme de X sur son image dans $(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$. Quelle est l'action sur $(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ associée ?

Remarque : pour $n \geq 1$, on peut vérifier que l'on a

$$x = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}}.$$

La suite $(a_n(x))_{n \geq 1}$ est le développement en fraction continue de x .

3. On admet que μ est ergodique pour T . Montrer que pour presque tout x , pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, le nombre de j apparaissant dans le développement en fraction continue de x a une fréquence asymptotique égale à

$$\frac{2 \ln(1+j) - \ln j - \ln(2+j)}{\ln 2}.$$

TD 11 : Révisions

Dire (en justifiant bien sûr...) si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soit (X, μ) un espace mesuré, et soit $L^0(X, \mu)$ l'espace des fonctions mesurables sur X , quotienté par la relation d'égalité μ -presque partout. Il existe une distance sur $L^0(X, \mu)$ qui métrise la convergence presque partout.
2. Soit (X, μ) un espace mesuré, et soit $p, q \in [1, +\infty[$. On suppose que (f_n) est une suite de fonctions qui converge vers une fonction f dans $L^p(X, \mu)$, et que de plus $|f_n|$ est dominée par une fonction $g \in L^q(X, \mu)$. Alors f est dans $L^q(X, \mu)$ et f_n tend vers f dans $L^q(X, \mu)$.
3. Soient (X, μ) un espace mesuré, et f et $(f_n)_{n \geq 0}$ des fonctions mesurables sur X . Alors :
 - (a) Si la suite (f_n) converge presque partout vers f , alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu(\sup_{k \geq n} |f_k - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 - (b) La réciproque de (a) est vraie.
 - (c) Les deux affirmations (a) et (b) sont vraies sous l'hypothèse que μ est une mesure finie.
4. La relation $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt$ ($x > 0$) permet de calculer

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction radiale (au sens où $f(x) = F(\|x\|_2)$) c'est aussi le cas de sa transformée de Fourier $\hat{f}$.
6. Soient $S, T > 0$ tels que S/T soit irrationnel. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable S -périodique et T -périodique. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = c$ presque partout.
7. L'ergodicité est une notion stable par produit direct : si T agit ergodiquement sur un espace (X, μ) et S agit ergodiquement sur (Y, ν) , alors l'action $S \times T$ sur $(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ donnée par $(S \times T)(x, y) = (Sx, Ty)$ est ergodique.
8. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ la translation T_α définie par $R_{\alpha_1} \times R_{\alpha_2} \times \dots \times R_{\alpha_d}$ est ergodique ssi les α_i sont tous irrationnels. Si cette assertion est fausse, donner un critère assurant l'ergodicité de T_α .
9. La question 2 de l'exercice 6 du TD9 reste vraie sans l'hypothèse d'inversibilité de T . A savoir, si (X, T) est un système dynamique et μ est une mesure de probabilité ergodique pour T , alors toute mesure de probabilité absolument continue par rapport à μ et invariante pour T est égale à μ .
10. (a) Le quadruplement de l'angle sur le cercle $T_4 : x \mapsto 4x \bmod 1$ est isomorphe au système produit $T_2 \times T_2$ sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, où T_2 est le doublement de l'angle sur le cercle.
 (b) Le doublement de l'angle T_2 est isomorphe à une rotation R_α pour un α bien choisi.