ENS de Lyon - MA2 **TD 1** **18 septembre 2012**

Processus de Markov, Équations différentielles stochastiques

Exercice 1 Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d uniformes sur $[0,1]$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$, et on définit le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_0 = 0$ et

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{si } 0 \leq Y_{n+1} < \frac{X_n}{X_n+1} \\ \\ 0 & \text{si } \frac{X_n}{X_n+1} \leq Y_{n+1} \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que X_n converge presque-sûrement vers une v.a. que l'on notera X_∞.
2. Montrer que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)-$martingale.
3. A-t-on $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$? La martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément intégrable ?
4. Soit $T := \inf\{n \geq 0, X_n = 0\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement. A-t-on $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$?

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. intégrables. On pose pour $n \geq 1$, $\widetilde{X}_n = |X_n|$ et pour $n \geq 0$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ et $\widetilde{S}_n = \widetilde{X}_1 + ... + \widetilde{X}_n$. Soit T un temps d'arrêt adapté à la filtration canonique de $(X_n)_{n\geq 1}$ et tel que $\mathbb{E}[T] < \infty$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[\widetilde{S}_T] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[\widetilde{X}_1]$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X_1]$.

Exercice 3 (décomposition de Doob) Montrer qu'une sous-martingale (X_n) se décompose de manière unique sous la forme

$$X_n = A_n + M_n, \qquad n \geq 0,$$

où (M_n) est une martingale et (A_n) un processus croissant prévisible partant de $A_0 = 0$.

Exercice 4

1. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Montrer que l'ensemble $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\}$, où $\mathcal{G}$ parcourt l'ensemble des sous-tribus de $\mathfrak{F}$, est uniformément intégrable.
2. Soit $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ une martingale rétrograde, *id est* indexée par les entiers négatifs. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable, et converge p.s. et dans L^1 vers une v.a. $X_{-\infty}$ vérifiant, pour tout $n \in -\mathbb{N}$,

$$X_{-\infty} \geq \mathbb{E}[X_n|\mathfrak{F}_{-\infty}].$$

Pour la convergence p.s., on pourra utiliser l'inégalité du nombre de montées.

Inégalités de Doob

Exercice 5 Soit (X_n) une sous-martingale et $a > 0$.

1. Montrer l'*inégalité maximale*

$$a\,\mathbb{P}(\sup_{0\le k\le n} X_k \ge a) \le \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{\sup_{0\le k\le n} X_k \ge a\}}] \le \mathbb{E}[X_n^+]$$

2. Montrer l'inégalité suivante :

$$a\,\mathbb{P}(\sup |X_k| \ge a) \le 2\mathbb{E}[|X_n|] - \mathbb{E}[X_0] \le 2\mathbb{E}[|X_n|] + \mathbb{E}[|X_0|]$$

Exercice 6 Soit (X_n) une martingale.

1. Pour Z v.a. positive et $p \ge 1$, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}[Z^p] = \int_0^\infty p a^{p-1} \mathbb{P}(Z \ge a) \mathrm{d}a$$

2. On pose $S_n := \sup_{0\le k\le n} |X_k|$. Soit aussi $p > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$ son exposant conjugué. Montrer que $(|X_n|)$ est une sous-martingale, puis montrer que

$$\mathbb{E}\left[S_n^p\right] \le q\,\mathbb{E}\left[|X_n|\, S_n^{p-1}\right]$$

3. Montrer l'*inégalité de Doob* :

$$\|S_n\|_p \le q \|X_n\|_p$$

Exercice 7 Soit (X_n) une sous-martingale, et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On définit les suites de temps d'arrêt (S_n) et (T_n) par $T_0 = 0$ et, pour $k \ge 0$,

$$\begin{aligned} S_k &:= \inf\{k \ge T_k, X_k \le a\} \\ T_{k+1} &:= \inf\{k \ge S_k, X_k \ge b\}. \end{aligned}$$

Pour $n \ge 0$, on note encore

$$N_{ab}(n) := \sup\{k \ge 0, T_k \le n\}$$

le nombre de montées de l'intervalle $[a, b]$ de la sous-martingale avant l'instant n. On veut montrer l'*inégalité du nombre de montées de Doob* :

$$(b - a)\mathbb{E}[N_{ab}(n)] \le \mathbb{E}[(X_n - a)^+ - (X_0 - a)^+].$$

1. *en utilisant des temps d'arrêt.* Supposer $a = 0$ et montrer que l'inégalité maximale se généralise en

$$b\,\mathbb{P}(T \le n) \le \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{T\le n}]$$

pour toute sous-martingale (X_n) et tout temps d'arrêt T vérifiant $X_T \geq b$ sur l'événement $\{T \leq n\}$. En déduire

$$b\mathbb{P}[T_k \leq n] \leq \mathbb{E}[X_{n\wedge S_k}\mathbb{1}_{T_k\leq n}],$$

puis

$$b\mathbb{E}[N_{0b}(n)] \leq E[X_n^+\mathbb{1}_{S_0\leq n}].$$

Conclure en introduisant la sous-martingale $X^+_{n\wedge S_0}$.

2. *avec "intégration".* Considérer la sous-martingale définie par $Y_n := (X_n - a)^+$, et le processus positif prévisible

$$H_n := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{S_k<n\leq T_{k+1}}$$

Montrer le résultat à l'aide des processus $((H.Y)_n)$ et $(((1-H).Y)_n)$, où

$$(H.Y)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}).$$