Processus de Markov, Équations différentielles stochastiques

Exercice 1 Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale càdlàg de carré intégrable.

1. Montrer que les v.a. X_0 et $X_n - X_{n-1}$, $n = 1,\ 2,\ ...$, sont deux à deux orthogonales dans L^2.
2. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 si et seulement si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2]$ est fini. Montrer que si elle converge dans L^2, la convergence est aussi presque sûre.
3. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ converge dans L^2 ssi $\sup_{t\in[0,\infty)} \mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, et que dans le cas de convergence dans L^2, la convergence est aussi presque sûre.

Exercice 2 Sur un espace de probabilité, soit Z une v.a. intégrable et $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration usuelle. Montrer que $X_t := \mathbb{E}[Z|\mathfrak{F}_t]$ définit une martingale fermée. Que vaut X_∞, la limite presque sûre de $(X_t)_{t\geq 0}$?

Exercice 3 Soit Y et A des processus adaptés à une filtration $(\mathfrak{F}_s)_{0\leq s\leq t}$, avec A processus borné. Montrer que $(Y_s + \int_0^s A_u \mathrm{d}u)_{0\leq s\leq t}$ est une martingale si et seulement si $Y_s = \mathbb{E}\left[\int_s^t A_u \mathrm{d}u + Y_t \;\middle|\; \mathfrak{F}_s\right]$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

Exercice 4 Soit X une martingale locale positive telle que $X_0 \in L^1$. Montrer que X est une surmartingale.

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale positive non-fermée telle que $X_0 = 1$. Soit X_∞ la limite presque-sûre de $(X_n)_{n\geq 0}$ (pourquoi est-elle bien définie ?). On définit le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ par $Y_t = X_\infty$ si $t \geq 1$ et

$$Y_t = X_n \quad \text{si} \quad t \in [1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-n-1}).$$

Montrer que Y n'est pas une martingale, bien qu'elle soit une martingale locale telle que pour tout $t \geq 0$, $Y_t \in L^1$.

Exercice 6 (processus de Poisson) Soient $\lambda > 0$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de lois exponentielles de paramètre λ. On pose, pour $n \geq 0$, $T_n = S_1 + ... + S_n$, et pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$N_t := \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{T_n \leq t}.$$

Le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est appelé processus de Poisson de paramètre λ. On désignera par $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. On admettra que pour $t > 0$ fixé, les processus $(N_s)_{0\leq s\leq t}$ et $(N_{t+s})_{s\geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants de paramètre λ (le premier, stoppé au temps t).

1. Montrer que pour tout $t > 0$, la v.a. N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt. On pourra par exemple calculer par récurrence $\mathbb{P}(N_t = k)$ pour tout $k \geq 0$.

2. Déterminer deux processus adaptés A_t et $\widetilde{A}_t$ tels que

$$M_t := N_t - A_t \quad \text{et} \quad \widetilde{M_t} := M_t^2 - \widetilde{A}_t$$

sont des martingales.

Exercice 7 (l'attente du bus) On reprend les notations de l'exercice précédent, les instants T_n modélisant les instants d'arrivée successifs d'un bus à une station. Vous arrivez à la station à un instant $t > 0$. On note $Z_t := T_{N_t+1} - t$ le temps que vous allez attendre avant de pouvoir prendre le bus, et $W_t := t - T_{N_t}$ l'intervalle de temps entre votre arrivée et le passage du bus précédent.

1. Tâchez de vous forger une intuition de quelle doit être la loi/l'espérance de Z_t par rapport à celle de $Z_0 = T_1$, ainsi que de quelle doit être la loi de $W_t + Z_t$ lorsque t est grand.
2. Déterminer la loi de Z_t puis calculer $\mathbb{E}[Z_t]$. Commenter.
3. Montrer que W_t et Z_t sont indépendantes. Commenter.
4. Déterminer la loi de W_t puis celle de $W_t + Z_t$ et étudier son comportement quand t tend vers l'infini. Commenter.