ENS de Lyon - MA2 **TD 3** **16 octobre 2012**

Processus de Markov, Équations différentielles stochastiques

Exercice 1 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien (continu). Montrer que les processus suivants sont des mouvements browniens (continus) :

1. $(\frac{\varepsilon}{a}B_{a^2t})_{t\geq 0}$, où $a>0$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$.
2. $(B_{s+t}-B_s)_{t\geq 0}$, où $s>0$.
3. $(\mathbb{1}_{t>0}tB(1/t))_{t\geq 0}$.

Exercice 2 Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}_+$, finie sur les compacts, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ, et de dérivée de Radon-Nikodym f. Soit G une mesure gaussienne sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité μ. On définit le processus gaussien $(X_t)_{t\geq 0}$ par $X_t=G(\mathbb{1}_{[0,t]})$.

1. Expliciter la fonction de covariance de X.
2. Écrire le processus sous la forme d'un mouvement brownien changé de temps, c'est-à-dire sous la forme $X_t=B_{g(t)}$, où B est un mouvement brownien et g une fonction croissante que l'on précisera.

Exercice 3 [construction du mouvement brownien par Paul Lévy]

La construction de Lévy construit un mouvement brownien à trajectoires continues sur $[0,1]$. Cette construction est trajectorielle, dans le sens où, à ω fixé, on essaie d'approcher la trajectoire finale de plus en plus finement en observant le mouvement brownien seulement en certains points (mais de plus en plus). Nous commençons par 2 questions préliminaires qui expliquent pourquoi on peut se contenter de construire le mouvement brownien sur $[0,1]$, et donnent une première idée de comment on peut "observer le mouvement brownien en de plus en plus de points". La première partie servira à faire le lien entre la construction de Lévy et les mesures gaussiennes, bien que la construction de Lévy soit plus élémentaire et ne nécessite pas cette théorie. Dans la deuxième partie, on définit la construction et on montre qu'on obtient bien un mouvement brownien.

0 : (Questions préliminaires)

On suppose construit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien sur $[0,1]$.

1. Indiquer comment on peut alors construire $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur tout $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $0<s<t$. Quelle est la loi de B_s sachant B_t ?

I : (Base de Haar de $L^2([0,1])$ et fonctions de Schauder)

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de nombres dyadiques de $(0,1]$. Tout $x\in\mathcal{D}$ s'écrit de manière unique $x=(2k+1)/2^n$, avec k, $n\in\mathbb{N}$ tels que $2k+1\leq 2^n$. On introduit les fonctions de Haar $(h_x)_{x\in\mathcal{D}}$ par

$$\begin{aligned} h_1 &= \mathbb{1}_{[0,1]}, \\ h_x &= 2^{\frac{n-1}{2}}\left(\mathbb{1}_{[\frac{2k}{2^n},\frac{2k+1}{2^n}]}-\mathbb{1}_{[\frac{2k+1}{2^n},\frac{2k+2}{2^n}]}\right) \text{ si } x=\frac{2k+1}{2^n} \text{ et } n>0. \end{aligned}$$

1. Représenter les fonctions $h_{\frac{2k+1}{2^n}}$ pour $n \leq 2$ puis montrer que les fonctions $(h_x)_{x\in\mathcal{D}}$ forme une base hilbertienne de $L^2([0,1])$. Cette base porte le nom de base de Haar.
2. Définir, pour $x \in \mathcal{D}$, une fonction f_x telle que pour tout $t \in [0,1]$, on ait

$$< \mathbb{1}_{[0,t]}, h_x >= f_x(t).$$

Représenter les fonctions $f_{\frac{2k+1}{2^n}}$ pour $n \leq 2$. Les fonctions f_x portent le nom de fonctions de Schauder.

II : (Construction du mouvement brownien)

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel est définie $(X_x)_{x\in\mathcal{D}}$ une famille de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Cette famille engendre un espace gaussien $H \subset L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. On sait qu'on construit une mesure gaussienne G sur $[0,1]$ d'intensité la mesure de Lebesgue λ par la formule

$$\begin{array}{rccl} G: & L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) & \to & H \\ & f & \mapsto & \displaystyle\sum_{x\in\mathcal{D}} < f, h_x > X_x, \end{array}$$

En particulier, on peut définir un mouvement brownien $(B_t)_{t\in[0,1]}$ par la formule

$$B_t = \sum_{x\in\mathcal{D}} f_x(t) X_x,$$

pour chaque $t \in [0,1]$ fixé, la somme étant convergente dans $L^2([0,1])$. Au contraire, dans la construction de Lévy, on travaille à $\omega \in \Omega$ fixé, et on considère les fonctions $X_x(\omega) f_x$. On montre que presque sûrement, la somme de ces fonctions est bien définie dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme infinie. On définit alors le mouvement brownien comme étant cette somme, lorsqu'elle est définie, et la fonction nulle sinon. Les trajectoires de ce processus sont donc continues "par construction".

1. Soit $B^n := \sum_{x\in\{1/2^n,\ldots,2^n/2^n\}} X_x f_x$. Représenter une réalisation des fonctions B^0, B^1, B^2 (pour un même ω).
2. Soit A_n l'événement

$$A_n := \{\|B^{n+1} - B^n\| \geq c\sqrt{n}2^{-n/2}\},$$

où c est une constante strictement supérieure à $\sqrt{2\log 2}$. Montrer que presque-sûrement, seul un nombre fini de A_n est réalisé. En déduire que la suite de fonctions B^n converge bien uniformément. On appelle B sa limite.
3. Observer que $B_{1/2}$ et B_1 s'expriment facilement en fonction de $X_{1/2}$ et X_1, puis montrer que $B_{1/2}$ et $B_1 - B_{1/2}$ sont deux variables gaussiennes indépendantes, centrées, de variance $1/2$.

4. Plus généralement, montrer que si q, r, s, t sont dans $\mathcal{D}$ et tels que $q < r \leq s < t$, alors $B_r - B_q$ et $B_t - B_s$ sont des variables gaussiennes indépendantes de variance $r - q$ et $t - s$ respectivement.
5. Montrer que B est un mouvement brownien.

Exercice 4 On rappelle que pour $\alpha > 0$, la loi de Cauchy de paramètre α est définie par son intensité

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi\alpha(1 + (x/\alpha)^2)}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et que sa fonction caractéristique est donnée par $\phi_\alpha(t) = \exp(-\alpha\,|t|)$.

1. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction symétrique $\Gamma(s,t) = c\exp(-\alpha\,|t-s|)$. Montrer qu'elle est de type positif.

On construit donc $(\beta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus gaussien de fonction de covariance Γ. Ce processus est appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU), de paramètre α et de taille c.

2. Montrer que β est un processus stationnaire. Quelle est la loi de β_0 ?
3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $\lambda > 0$. Montrer que le processus défini sur $\mathbb{R}$ par
$$X_t := e^{-\lambda t} B_{\exp(2\lambda t)}$$
est un processus d'OU dont on précisera le paramètre et la taille.

Exercice 5 On souhaite définir, pour $H \in (0,1)$, un mouvement brownien fractionnaire (MBf) standard d'indice H (ou d'exposant de Hurst H), $(B_H(t))_{t\geq 0}$, processus gaussien centré dont la fonction de covariance est donnée par

$$\Gamma(s,t) = \mathbb{E}[B_H(s)B_H(t)] = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

1. Pour construire un tel processus directement, quelle propriété de l'opérateur Γ faudrait-il vérifier ?

Soit G une mesure gaussienne sur $\mathbb{R}$ d'intensité la mesure de Lebesgue λ. On définit, pour $t \geq 0$, la fonction f_t sur $\mathbb{R}$ par

$$f_t(x) := |x-t|^{H-\frac{1}{2}} - |x|^{H-\frac{1}{2}}.$$

2. Vérifier que cette fonction est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$
3. Montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout t, la norme de f_t est égale à ct^{2H}.
4. Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ le processus gaussien défini par $Z_t = G(f_t)$. Calculer sa fonction de covariance, puis construire un MBf standard B_H d'indice H.
5. Soit $r > 0$. Montrer que $(B_H(r+t) - B_H(r))_{t\geq 0}$ est encore un MBf standard d'indice H. On dit que le MBf est à accroissements stationnaires. Est-il à accroissements indépendants ?