ENS de Lyon - MA2 **TD 4** **6 novembre 2012**

Processus de Markov, Équations différentielles stochastiques

Exercice 1 Si $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et si φ la surjection canonique de $\mathbb{R}$ sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on appelle $\varphi \circ B$ mouvement brownien sur le cercle. On pose

$$T := \inf\{t \geq 0, \varphi \circ B([0,t]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\varphi(B_T)$, le dernier point visité par le mouvement brownien sur le cercle, est uniformément réparti sur le cercle.

Exercice 2 Soit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien et soit

$$T := \sup\{t \in [0,1], B_t = 0\}$$

l'instant du "dernier zéro". Montrer que B change de signe infiniment souvent juste avant T, à savoir, qu'il existe (t_n) une suite croissante tendant vers T telle que pour tout n, on ait $B_{t_{2n}} > 0$ et $B_{t_{2n+1}} < 0$. On pourra penser à introduire, pour q rationnel, le temps d'arrêt $T_q := \inf\{t \geq q, B_t = 0\}$.

Exercice 3 Pour $\alpha > 1/2$, montrer que le mouvement brownien n'est nulle part localement $\alpha-$Hölder.

Exercice 4 Soit Z une variable aléatoire réelle bornée et A un processus à variation finie (donc $A_0 = 0$ et les trajectoires de A sont continues), croissant et borné. Montrer :

$$\mathbb{E}[ZA_\infty] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty E[Z\,|\mathcal{F}_t]\mathrm{d}A_t\right].$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée, et B un mouvement brownien. Montrer que le processus

$$Z_t = \int_0^t f(s)\mathrm{d}B_s$$

est un processus gaussien et donner sa fonction de covariance $\Gamma(s,t)$. Prouver que le processus $\exp\{Z_t - \frac{1}{2}\Gamma(s,t)\}$ est une martingale.

Exercice 6 Soit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien. Le "pont brownien partant de x et arrivant en y" est défini par la formule

$$X_t = x + B_t - t(B_1 + x - y), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

1. Montrer que, pour $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}] =$$
$$\int f(x_1, \ldots, x_n) \frac{p(t_1, x, x_1)}{p(1, x, y)} \prod_{i=2}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_i, x_{i+1}) p(1 - t_n, x_n, y) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

où l'on a écrit
$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}.$$

2. En déduire que, pour tout $t < 1$, la loi des processus $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ et $(x + B_s)_{0 \leq s \leq t}$ sont mutuellement absolument continues, et que la dérivée de Radon-Nikodym, évaluée en $(\psi_s)_{0 \leq s \leq t}$, est en fait une fonction de ψ_t.

Exercice 7 Soit $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$ un mouvement brownien. Si on considère une suite de partitions
$$0 = t_0^{(n)} < \ \ldots\ < t_{k_n}^{(n)} = t,$$
de pas tendant vers 0, on sait que la quantité
$$M_n := \sum_{i=1}^{k_n} (B(t_i^{(n)}) - B(t_{i-1}^{(n)}))^2$$
converge dans L^2, et donc en probabilité, vers $\langle B, B \rangle_t = t$. La question que l'on se pose est si l'on ne pourrait pas avoir un résultat de convergence presque sûre...

1. (a) On suppose dans cette question que les partitions sont emboîtées, et que l'on a $k_n = n$. Montrer que (M_n) est une martingale rétrograde et en déduire que M_n converge presque sûrement vers t.
   (b) On suppose ici
   $$\sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^{k_n} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})^2 < \infty.$$
   Montrer que M_n converge presque sûrement vers t.
2. On suppose maintenant $t = 1$, pour simplifier.
   (a) Soit $s \in (0, 1)$ et $c > 0$. Montrer que presque-sûrement, il existe un intervalle dyadique $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$ contenant s et tel que
   $$\left| B(\frac{k}{2^n}) - B(\frac{k-1}{2^n}) \right| \geq c\ 2^{-n}.$$
   (b) Montrer qu'il existe $(t_i^{(n)})$ une suite aléatoire de partitions dyadiques de pas tendant vers 0, telle que M_n tend vers $+\infty$ presque sûrement.
   (c) Montrer qu'il existe une suite déterministe de partitions de pas tendant vers 0, telle que, presque sûrement,
   $$\limsup_{n \to \infty} M_n = \infty.$$