Processus de Markov, Équations différentielles stochastiques

Exercice 1 Soit B un mouvement brownien (partant de 0). On pose, pour $a \neq 0$,

$$T_a := \inf\{t \geq 0, B_t = a\}.$$

Déterminer la transformée de Laplace de T_a.

Exercice 2 Soit X et Y deux mouvements browniens indépendants, et $\rho \in [0,1]$. Soit Z le processus défini par

$$Z_t = \rho X_t + \sqrt{1-\rho^2} Y_t.$$

Montrer que Z est un mouvement brownien et calculer $\langle X, Z\rangle$ et $\langle Y, Z\rangle$. Montrer que X_1 et Z sont indépendants conditionnellement à Z_1.

Exercice 3

1. Soit B un mouvement brownien. Montrer que l'on a

$$\int_0^t B_s^2 \mathrm{d}B_s = \frac{B_t^3}{3} - \int_0^t B_s \mathrm{d}s.$$

2. Soit B un mouvement brownien tri-dimensionnel ne partant pas de 0. Montrer que $1/\|B_t\|$ est une martingale locale. Montrer qu'il ne s'agit pas d'une martingale.
3. Soit B un mouvement brownien et $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de l'equation de la chaleur :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2} = 0.$$

Montrer que le processus $F(t, B_t)$ est une martingale. Proposer une version multi-dimensionnelle de ce résultat.

Exercice 4

1. Soit B un mouvement brownien. Ecrire la décomposition d'Itô de la semimartingale tB_t.
2. On pose

$$X_t = \int_0^t s \mathrm{d}B_s \qquad et \qquad Y_t = \int_0^t B_s \mathrm{d}s.$$

Déterminer $\langle X, X\rangle_t$, puis la loi de X_t et de Y_t (pour t fixé). Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 [Inégalité exponentielle ou de Bernstein]

1. Pour X surmartingale positive, prouver l'inégalité maximale suivante :

$$\mathbb{P}(X_t^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[M_t] \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[M_0],$$

où $\lambda > 0$ et où on a noté $X_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} X_s$.

2. Soit M une martingale locale continue partant de 0 et $M_t^* = \sup_{0 \le s \le t} |M_s|$. Montrer :

$$\mathbb{P}\left(M_\infty^* \ge x, \langle M, M \rangle_\infty \le y\right) \le \exp(-x^2/2y).$$

Exercice 6 Prouver la propriété de Markov forte du mouvement Brownien en utilisant le théorème de Lévy.

Exercice 7 Soit B un mouvement brownien. On définit l'intégrale de Stratonovitch d'un processus élémentaire

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s)$$

par la formule

$$\int_0^{t_p} H_s \circ \mathrm{d}B_s = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{H_{i+1} + H_i}{2} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

L'intégrale de Stratonovich $\int_0^t X_s \circ \mathrm{d}B_s$ d'un processus adapté X est défini comme la limite dans H^2 de la suite $\int_0^t H_s^{(n)} \circ \mathrm{d}B_s$, pour $H^{(n)}$ suite de processus élémentaires convergeant dans L^2 vers X. On admettra que la limite existe et est indépendante du choix de la suite $H^{(n)}$.

1. Calculer
$$\int_0^t B_s \circ \mathrm{d}B_s.$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $(X_t)_{0 \le t \le T}$ une processus adapté tel que pour $0 \le t \le T$, on ait
$$X_t = \int_0^t g(X_s) \circ \mathrm{d}B_s.$$
Soit Y_t l'intégrale d'Itô
$$Y_t = \int_0^t g(X_s) \mathrm{d}B_s.$$
Montrer que pour $0 \le t \le T$, on a
$$X_t - Y_t = \frac{1}{2} \int_0^t g(X_s) g'(X_s) \mathrm{d}s.$$