ENS de Lyon - MA2 **TD 7** **11 décembre 2012**

Processus de Markov, Équations différentielles stochastiques

Exercice 1 (Ornstein-Uhlenbeck) Soit $\lambda > 0$. On considère l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = -\lambda X_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

1. Soit X une solution, avec condition initiale X_0. Ecrire la formule d'Itô pour le processus $e^{\lambda t} X_t$.
2. Résoudre entièrement l'équation différentielle stochastique, en précisant si il y a existence, unicité, faible ou forte, de la solution.
3. Faire le lien avec le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$Y_t = e^{-\lambda t} B_{\exp(2\lambda t)}$$

introduit dans le TD3.

Exercice 2 1. Soit B un mouvement brownien. On introduit $\alpha \in (0, 1/2)$ et la fonction $a : x \mapsto 1 \wedge |x|^\alpha$. Montrer que le processus $\int_0^t a^{-2}(B_s)\mathrm{d}s$ est bien défini.

2. On pose

$$\tau_t := \inf\{u > 0, \int_0^u a^{-2}(B_s)\mathrm{d}s > t\},$$

et $X_t := B_{\tau_t}$. Montrer que X est une martingale locale (continue) et calculer son crochet.

3. Montrer que le processus X fournit une solution à l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\mathrm{d}\beta_t.$$

On précisera l'espace de probabilité filtré sur lequel est définie cette solution, ainsi que le mouvement brownien β. Proposer une autre solution, forte, à cette équation.

Exercice 3 (processus de Bessel) Soit B un mouvement brownien d-dimensionnel, avec $d \geq 2$, partant de $x_0 \neq 0$ de norme r_0.

1. Soit $R_t := \|B_t\|_2$ et $T_\varepsilon := \inf\{t > 0, R_t \leq \varepsilon\}$. Montrer que si $\varepsilon < r_0$, alors $R_{t\wedge T_\varepsilon}$ coïncide avec une solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = \frac{d-1}{2} X_t^{-1}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\beta_t,$$

stoppée à son premier temps d'atteinte de ε. Peut-on en déduire que R est solution (non stoppée) de l'EDS ?

2. On suppose dans cette question $d = 2$.

(a) Soit $\varepsilon < r_0 < M$. Montrer que $\log(R_{t\wedge T_\varepsilon \wedge T_M})$ est une martingale uniformément intégrable. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(T_\varepsilon < T_M)$.

(b) Montrer que presque sûrement, le mouvement brownien $2-$dimensionnel passe une infinité de fois dans tout voisinage de l'origine, mais sans jamais la toucher.

3. Par une méthode similaire, montrer qu'en dimension $d \geq 3$, la variable

$$m := \inf_{0\leq t<\infty} R_t$$

suit la loi bêta définie par $\mathbb{P}(m \leq r) = (r/r_0)^{d-2}$ si $0 \leq r \leq r_0$.

On a ainsi redémontré la récurrence du mouvement Brownien en dimension 2 et sa transience en dimension 3 et supérieure.

4. Revenir sur la dernière question du 1.