ENS de Lyon - MA2 **TD 8** **18 décembre 2012**

Processus de Markov, Équations différentielles stochastiques

Exercice 1 On considère l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = X_t^3 \mathrm{d}t + X_t^2 \mathrm{d}B_t.$$

avec condition initiale $X_0 = x_0$.

1. On suppose $x_0 > 0$. Chercher une solution de cette équation du type $f(B_t)$, avec f fonction C^2. Observer que la solution construite explose p.s. en temps fini.
2. Montrer l'unicité de la solution jusqu'au temps d'explosion.
3. Et si $x_0 = 0$?

Exercice 2 On considère l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = \frac{x - X_t}{1-t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \quad t \in [0,1),$$

avec condition initiale $X_0 = 0$.

1. Montrer que sa solution est
$$X_t = xt + B_t - (1-t)\int_0^t \frac{B_s}{(1-s)^2}\mathrm{d}s = xt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\mathrm{d}B_s$$
2. Montrer que X_t converge presque sûrement vers x quand t tend vers 1. On pourra raisonner sur une réalisation fixée de B.
3. Soit N une gaussienne centrée réduite indépendante de B. Montrer que le processus $X_t + tN$ est un mouvement brownien. *Ainsi, le processus X n'est autre qu'un pont brownien conditionné à valoir x au temps 1.*

—

Exercice 3 (une once de Black-Scholes) Sur le marché, on peut investir de l'argent sur un actif sûr de valeur $S_t = S_0 e^{rt}$ (rendement constant égal à r), ou sur un actif risqué dont la valeur R_t est régie par l'EDS

$$\mathrm{d}R_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t,$$

où μ est le taux de rendement moyen et σ la volatilité.

On désigne par A_t son avoir au temps t. Une stratégie d'investissement consiste à investir a_t unités de l'actif risqué à l'instant t, pour une valeur de $a_t R_t$, la valeur restante $A_t - a_t R_t$ étant investie sur l'actif sûr. Le processus a_t est supposé adapté continu (mais on n'impose ni $a_t \geq 0$, ni $A_t - a_t R_t \geq 0$).

On cherche une stratégie d'investissement qui garantisse un avoir de $(R_T - K)_+$ au temps $T > 0$. Une question naturelle est de savoir si cela est possible, et avec quel avoir initial...

1. Résoudre l'EDS.
2. En utilisant le théorème de Cameron-Martin, introduire une loi $\tilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle le processus
$$\tilde{B}_t = B_t + (\frac{\mu - r}{\sigma})t$$
est un mouvement brownien.
3. Montrer que, quelle que soit la stratégie, le processus $A_t e^{-rt}$ est une martingale locale sous $\tilde{\mathbb{P}}$. Si on suppose de plus que a est borné, montrer que c'est une vraie martingale.
4. En déduire qu'une stratégie donnant un avoir de $(R_T - K)_+$ au temps T vérifie nécessairement
$$A_t = f(R_t, T - t),$$
où f est la fonction définie par
$$f(\rho, s) = \mathbb{E}\left[\left(\rho \exp(-\frac{\sigma^2 s}{2} + \sigma s N) - K e^{-rs}\right)_+\right],$$
où N est une gaussienne centrée réduite. Observer que A_t ne dépend que de R_t et $T - t$, et que la formule ne fait pas intervenir μ !
On pourrait terminer le calcul (un peu fastidieux) et vérifier qu'on obtient bien une stratégie d'investissement fournissant un avoir de $(R_T - K)_+$ au temps $T > 0$. Dans cette stratégie, a_t reste bien borné, et de plus strictement positif, mais $a_t R_t$ peut dépasser la valeur de A_t (ce qui correspond à un emprunt au taux r). Ce calcul intervient dans le modèle de Black-Scholes pour l'étude des options européennes...