Transformée de Fourier

Exercice 1.— Premiers exemples de transformées de Fourier

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$$f = \mathbb{1}_{[a,b]} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \exp(-cx)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

où les réels a, b et c vérifient $a < b$ et $c > 0$.

Exercice 2.— Des séries de Fourier à la transformée de Fourier...

On rappelle que le n-ième coefficient de Fourier d'une fonction T-périodique f, intégrable sur sa période, est défini par

$$c_n(f) := \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}}}\, \mathrm{d}x.$$

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. À $\mathrm{T} > 0$, on associe la fonction T-périodique f_T qui coïncide avec f sur $]-\mathrm{T}/2, \mathrm{T}/2]$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{T} c_{\lfloor \lambda \mathrm{T} \rfloor}(f_\mathrm{T}) \underset{\mathrm{T}\to\infty}{\longrightarrow} \hat{f}(-2\pi\lambda).$$

Exercice 3.— Transformée de Fourier d'une fonction radiale

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction radiale, au sens où il existe une fonction mesurable g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = g(|x|),$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de x. Montrer que sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est également radiale.

Exercice 4.— Autre preuve de Riemann-Lebesgue

Le théorème de Riemann-Lebesgue affirme que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 lorsque $|\xi| \to \infty$.

1. Montrer que le théorème est valide pour f fonction indicatrice d'un pavé de $\mathbb{R}^d$. Ici, un pavé désigne un produit de segments.
2. En déduire le théorème pour toute $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ par linéarité de la transformée de Fourier et densité dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions combinaisons linéaires d'indicatrices de pavés. On détaillera bien l'argument.

Exercice 5.— Espace de Schwartz

L'espace de Schwartz est défini par

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \text{ multi-indice}, |x|^k \mathrm{D}_\alpha f(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\},$$

où $\mathrm{D}_\alpha f$ désigne la dérivée partielle de f par rapport au multi-indice α. Montrer que l'espace de Schwartz est stable par la transformée de Fourier, au sens où

$$\hat{\mathcal{S}} := \{\hat{f}, f \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{S}.$$

Montrer qu'on a en fait $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.
Remarque : *Cette remarquable propriété de stabilité fait de cet espace de Schwartz un espace de travail souvent très agréable à manipuler.*

Exercice 6.— Convolution dans différents espaces L^p

Soient p, q, et r dans $[1, +\infty]$ vérifiant $1/p + 1/q - 1/r = 1$. On cherche à montrer que le produit de convolution de $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ avec $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ est bien défini dans $\mathrm{L}^r(\mathbb{R})$, et vérifie l'inégalité suivante due à Young :

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1}$$

1. Préliminaires
   (a) Montrer l'inégalité d'Hölder à trois paramètres : si $f \in \mathrm{L}^a(\mathbb{R})$, $g \in \mathrm{L}^b(\mathbb{R})$ et $h \in \mathrm{L}^c(\mathbb{R})$, avec $1/a + 1/b + 1/c = 1$, alors $fgh \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et

   $$\|fgh\|_1 \le \|f\|_a \, \|g\|_b \, \|h\|_c.$$

   (b) Montrer que l'on peut se ramener au cas où les fonctions f et g sont à valeurs positives. Alors la convolée $f * g$ est bien définie comme fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, et l'on doit juste montrer que (1) est bien vérifiée. C'est ce qu'on démontre dans la question 2.
2. On suppose f et g positives.
   (a) Montrer que l'on a

   $$\|f * g\|_r^r = \iint_{\mathbb{R}^2} (f * g)^{r-1}(x) f(y) g(x - y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

   (b) En observant que les exposants conjugués $p' = p/(p - 1)$ et $q' = q/(q - 1)$ vérifient $1/p' + 1/q' + 1/r = 1$ et en écrivant

   $$\begin{aligned} (f * g)^{r-1} &= (f * g)^{r(1/p'+1/q')}, \\ f &= f^{p(1/q'+1/r)}, \\ g &= g^{q(1/p'+1/r)}, \end{aligned}$$

   prouver que l'on a

   $$\|f * g\|_r^r \le \|f * g\|_r^{r-1} \|f\|_p \|g\|_q.$$

   (c) Conclure.

Remarque : *Ce cas recouvre les cas de convolution $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^{p'}$ ainsi que $\mathrm{L}^1 - \mathrm{L}^p$... Noter toutefois qu'en général, il faut avoir $1/p + 1/q \ge 1$ pour que le produit de convolution soit bien défini.*