Transformée de Fourier (bis)

Exercice 1.— Calculs d'intégrales

Dans le premier TD, ont été calculées les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$$f = \mathbb{1}_{[a,b]} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \exp(-cx)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

où les réels a, b et c vérifient $a < b$ et $c > 0$. Déduire de ces calculs les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 2.— Uniforme continuité d'une transformée de Fourier

Soit μ une mesure signée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la transformée de Fourier de μ est uniformément continue.

Exercice 3.— Algèbres associatives unifères ?

L'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est une algèbre pour la convolution. Il en est de même pour l'espace des mesures signées. Ces algèbres sont-elles associatives ? Admettent-elles une unité ?

Exercice 4.— Formule sommatoire de Poisson

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1. On suppose qu'il existe C tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| + |f'(x)| \leq \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}.$$

1. Montrer que les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)$ sont absolument convergentes et de même somme. (On pourra justifier l'existence de $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ et utiliser la théorie des séries de Fourier.)
2. Application : Pour $x > 0$, montrer l'égalité suivante,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|x} = \frac{\pi}{x}\frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}},$$

   et en déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$.

Exercice 5.— Résolution d'une équation différentielle

On rappelle que l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$ est défini par

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) : \ \forall k, l \in \mathbb{N}, |x|^k f^{(l)}(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

Soit $f \in \mathcal{S}$. Démontrer qu'il existe une unique solution u dans $\mathcal{S}$ à l'équation

$$u'' - u = f$$

et l'exprimer comme produit de convolution d'une fonction explicite et de f.

Exercice 6.— Moments et dérivées

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\hat{\mu}$ est deux fois dérivable en 0 si et seulement si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{d}\mu(x)$ est finie.
2. Pour tout entier positif pair k, montrer que $\hat{\mu}$ est k fois dérivable en 0 si et seulement si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}\mu(x)$ est finie.

Remarque : *Par contre, $\hat{\mu}$ dérivable en 0 n'implique pas que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |x| \mathrm{d}\mu(x)$ est finie.*