Espaces de probabilité

Exercice 1.— Votre premier couplage

Soit $p \in [0,1]$. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p définies sur le même espace probabilisé. Que peut être la loi de la variable aléatoire $Z := \max(X, Y)$?

Exercice 2.— Modélisation

Un magicien vous présente un chapeau contenant deux cartes. L'une de ces cartes est noire des deux côtés, l'autre a un côté noir et un côté rouge. Vous tirez une carte et observez seulement son recto. Il est noir. Quelle est la probabilité que le verso de la carte soit rouge ?

Exercice 3.— Les mains au poker

En tirant cinq cartes dans un jeu de cinquante-deux, quelle est la probabilité d'obtenir :

(a) . . . un brelan ?
(b) . . . une et une seule paire ?
(c) . . . deux paires ?
(d) . . . une suite ?

On tire toujours cinq cartes dans un jeu de cinquante-deux. On désigne par A l'événement "avoir une suite" et B celui "avoir une couleur". Comparer $\mathbb{P}[A|B]$ et $\mathbb{P}[A]$.

Exercice 4.— Perte de mémoire et loi exponentielle

On rappelle que, si $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$, une variable aléatoire est dite exponentielle de paramètre λ si elle a pour loi

$$\lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathrm{d}x.$$

Une variable aléatoire est dite exponentielle s'il existe un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ pour lequel elle est exponentielle de paramètre λ.

1. Soit X une variable aléatoire exponentielle. Démontrer que, pour tous s et t réels positifs, $\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \mathbb{P}[X > s]$. Expliquer en quoi il s'agit d'une propriété de "perte de mémoire" de l'exponentielle.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$. On suppose que, pour tous s et t réels positifs, $\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \mathbb{P}[X > s]$. Démontrer que X est une variable exponentielle.
3. Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ une fonction mesurable d'intégrale 1. Soit X de loi $f(x)\mathrm{d}x$. Pour x réel, on note $F(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$. Enfin, pour t positif, on note $A_t := \int_0^t \frac{f(x)}{1-F(x)}\mathrm{d}x$. On va étudier les propriétés de la variable aléatoire A_X.
   (a) Calculer $\frac{f(x)}{1-F(x)}$ dans le cas où f est la densité d'une variable exponentielle.
   (b) Dans le cas où f est continue, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$\varepsilon^{-1}\mathbb{P}[X < x + \varepsilon | X > x] \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

(c) On écrit $G(t) = \mathbb{P}(A_X > t)$. Toujours dans le cas f continue, écrire une équation différentielle vérifiée par G, et en déduire que A_X est une variable exponentielle de paramètre 1.

(d) On note $t \mapsto A_t^{-1}$ la réciproque de la bijection que $t \mapsto A_t$ définit de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$. Sans supposer f continue, démontrer la formule de changement de variable suivante :

$$\int_{A_s^{-1}}^{A_t^{-1}} \frac{h(u)f(u)}{1 - F(u)} du = \int_s^t h(A_v^{-1}) dv,$$

pour $s < t$ réels positifs et $h : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On pourra commencer par traiter le cas des fonctions indicatrices.

(e) Montrer que G vérifie l'équation intégrale $G(t) = \int_t^{+\infty} G(u) du$, pour tout $t \geq 0$, et en déduire que A_X est une variable exponentielle de paramètre 1.

Exercice 5.— Mesure de Lebesgue et mesure $(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_0)^{\mathbb{N}^*}$

Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, muni de la tribu produit. En cours, vous avez vu comment construire, à partir de la mesure de Lebesgue, la mesure produit $\mathbb{P} = (\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_0)^{\mathbb{N}^*}$ sur Ω, définie comme étant l'unique mesure telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, ...\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\{1,...,n\}}$, on ait

$$\mathbb{P}(A_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n}) = 2^{-n},$$

où l'on a noté

$$A_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n} = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}^* \setminus \{1,...,n\}}.$$

Dans cet exercice on propose la construction inverse, ou comment construire la mesure de Lebesgue à partir de $\mathbb{P}$.

1. On définit ψ de Ω dans $[0,1]$ par $\psi(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \omega_k 2^{-k}$, où ω_k désigne la k-ième coordonnée de ω. Montrer que ψ est bien définie et mesurable (pour la tribu borélienne sur $[0,1]$).
2. Montrer la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ est la mesure image de $\mathbb{P}$ par ψ.

Remarque : *Cet exercice permet, à partir d'une suite de pile ou face indépendants, de simuler une variable aléatoire uniforme sur* $[0,1]$.

Exercice 6.— D'autres mesures produit

Sur $[0,1)^{\mathbb{N}^*}$, on définit la tribu borélienne produit $\mathcal{B}([0,1))^{\mathbb{N}^*}$ comme étant la plus petite tribu rendant mesurable toutes les applications coordonnées. On cherche à définir sur cet espace la mesure de Lebesgue produit $\lambda^{\mathbb{N}^*}$, vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous boréliens $A_1, ..., A_n$,

$$\lambda^{\mathbb{N}^*}\left(A_1 \times ... \times A_n \times \mathcal{B}([0,1))^{\mathbb{N}^* \setminus \{1,...,n\}}\right) = \lambda^n(A_1 \times ... \times A_n). \tag{1}$$

1. Prouver qu'il existe au plus une mesure $\lambda^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant (1).
2. Déterminer une application mesurable f de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ telle que
$$f_*\left((\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tfrac{1}{2}\delta_0)^{\mathbb{N}^*}\right) = (\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tfrac{1}{2}\delta_0)^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}.$$
On précisera les tribus utilisées et le sens de la mesure produit $(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_0)^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer une application mesurable g de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ dans $[0,1)^{\mathbb{N}^*}$ telle que
$$g_*\left((\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tfrac{1}{2}\delta_0)^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}\right)$$
vérifie (1). On a donc prouvé l'existence et l'unicité de la mesure $\lambda^{\mathbb{N}^*}$.
4. *Application :* Soit $p \in [0,1]$. Définir $\mathbb{P}_p := (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\mathbb{N}^*}$, mesure de Bernoulli produit sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, en utilisant une application mesurable h de $[0,1)^{\mathbb{N}^*}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.