Événements, variables aléatoires, espérance.

Exercice 1.— La main à la pâte

Calculer la fonction caractéristique, l'espérance et la variance des variables aléatoires de Bernoulli, binomiales, géométriques, de Poisson et exponentielles.

Exercice 2.— Des probabilités à l'espérance

Soit X une variable aléatoire positive. Soit $p > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}[X > x] \mathrm{d}x.$$

Exercice 3.— Formule d'inclusion-exclusion

Soit $E_1, \ldots, E_n$ des événements définis sur un même espace probabilisé.

1. Établir la formule d'inclusion-exclusion, à savoir

   $$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^n E_k\right] = \sum_{\emptyset \neq S \subset [n]} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left[\bigcap_{i \in S} E_i\right],$$

   où l'on a noté $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

   $$M_k := \sum_{\substack{S \subset [n] \\ 1 \leq |S| \leq k}} (-1)^{|S|-1} \mathbb{P}\left[\bigcap_{i \in S} E_i\right].$$

   Montrer que, pour tout entier naturel k, on a les inégalités suivantes

   $$M_{2k} \leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^n E_k\right] \leq M_{2k+1}.$$

   Il s'agit des inégalités de Bonferroni.

Exercice 4.— Les chapeaux

Dans une soirée mondaine, chaque invité laisse son chapeau dans le hall d'entrée. Une fois la soirée terminée, les n invités, éméchés, repartent chacun avec un chapeau "choisi de manière totalement aléatoire".

1. Modéliser mathématiquement la situation.
2. Comment évolue la probabilité de l'événement "aucun individu ne repart avec son chapeau" quand n tend vers l'infini ?
3. Comment évolue la probabilité de l'événement "exactement k individus repartent avec leur chapeau" quand n tend vers l'infini ? Discuter.

Exercice 5.— Approximations déterministes dans L^1 **et** L^2

Sot X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X^2 est intégrable. Déterminer la "variable aléatoire constante" la plus proche de X dans L^2, ainsi que sa distance à X. (On justifiera l'existence et l'unicité de cette "variable aléatoire constante".)
2. Maintenant, X est seulement supposée intégrable. Soit F sa fonction de répartition. Montrer que pour tout réel a,

$$\mathbb{E}[|X-a|] = \int_{-\infty}^{a} F(x)dx + \int_{a}^{\infty} (1-F(x))dx.$$

   Montrer que $\min_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[|X-a|]$ est atteint, et dire pour quelles valeurs de a.

Exercice 6.— Une énigme

Le faux mage blanc de Miécrémée a pris 2000 mathématiciens en otages. Voulant tester leur acuité intellectuelle, il leur propose un "jeu".

> *"J'ai choisi une manière de vous numéroter entre 1 et 2000. Sachez que chaque numéro n'est porté qu'une fois. J'ai rentré toutes ces données dans l'ordinateur central. Au début du jeu, je vous mettrai chacun dans un cachot, de telle sorte que vous ne pourrez plus communiquer. Vous aurez chacun à votre disposition un petit ordinateur dont la seule fonctionnalité est la suivante : si vous rentrez un nombre entre 1 et 2000, le nom de l'individu correspondant s'affiche. Chacun d'entre vous aura 1000 tentatives. Si ne serait-ce que* l'un *d'entre vous ne voit pas s'afficher son nom au cours de ses 1000 tentatives, vous serez* tous *exécutés. Tout est clair ? Je vous laisse une semaine pour, ensemble, mettre au point une stratégie. Alea jacta est."*

Les mathématiciens sont parvenus à trouver une stratégie leur garantissant une probabilité de survie supérieure à 30%. Êtes-vous capables d'en faire autant ?