Markov, Tchebychev et moments des variables aléatoires

Exercice 1.— L'inégalité de Tchebychev est-elle optimale ?

1. Oui. Montrer que si $a > 0$, alors il existe une variable aléatoire réelle X de variance finie non-nulle telle que
$$\mathbb{P}\Big[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\Big] = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$
2. Non. Démontrer que si X est une variable aléatoire de carré sommable, alors
$$a^2\ \mathbb{P}\Big[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\Big] \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. Presque. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une variable aléatoire réelle X de carré intégrable telle que
$$a^{2+\varepsilon}\ \mathbb{P}\Big[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\Big] \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Exercice 2.— Proportion d'urnes vides

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres entiers telle que r_n/n converge vers une constante $c > 0$. Pour n donné, on se donne n urnes et r_n boules. On place chaque boule, successivement, dans une urne choisie uniformément au hasard. On note N_n le nombre d'urnes laissées vides. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité que N_n/n diffère de la valeur déterministe e^{-c} de plus de ε, tend vers 0 quand $n \to \infty$.
Remarque : *D'après une terminologie à venir du cours, la suite de variables aléatoires* N_n/n *converge* en probabilité *vers* e^{-c}.

Exercice 3.— Processus de Bienaymé

On note T l'arbre binaire enraciné défini formellement comme suit : T est l'ensemble des mots finis définis sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et un mot m' est dit *père* d'un mot m si m est formé de m' suivi d'une unique lettre. L'ensemble T étant en bijection avec $\mathbb{N}$, d'après le TD 3, on peut tirer X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}^T$ et de loi $\mathrm{Ber}(p)^T$, où $p \in [0, 1]$. La variable X étant tirée, on définit le mot vide comme *vivant*. Récursivement, on définit comme *vivant* tout individu m dont le père est vivant et l'étiquette X_m égale à 1. Si un individu n'est pas décrété vivant au bout d'un nombre fini d'étapes précédentes, il est dit *mort*.
Pour n entier naturel, on note N_n la variable aléatoire "nombre d'individus vivants de la génération n".

1. On suppose que $p < 1/2$. Montrer que l'espérance de N_n tend vers 0. En déduire que, presque sûrement, l'ensemble des individus vivants est fini.
2. On suppose désormais que $p > 1/2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer explicitement les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire N_n définie comme "nombre d'individus vivants de la génération n". Montrer que $\inf_n \mathbb{E}[N_n]^2/\mathbb{E}[N_n^2] > 0$. En déduire que la probabilité que l'ensemble des individus vivants soit infini est strictement positive.

Exercice 4.— Droite de régression

Soient X et Y des variables aléatoires réelles de carré intégrable définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose la variance de Y strictement positive. Montrer que la meilleure approximation de X dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par une fonction affine de Y est

$$Z = \mathbb{E}[X] + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}(Y - \mathbb{E}[Y]).$$

Exercice 5.— Le problème des moments, variable bornée.

1. Soit X une variable aléatoire réelle bornée. Montrer que sa fonction caractéristique est une série entière de rayon de convergence infini.
2. En déduire que la loi d'une variable réelle bornée est caractérisée par ses moments.

Exercice 6.— Le problème des moments

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

   $$f(x) = \frac{\sin(2\pi \ln x)}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln x)^2}{2}\right).$$

   Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\int x^k f(x)dx$.
2. La loi d'une variable aléatoire réelle de signe constant dont les moments sont tous finis est-elle caractérisée par ses moments ?