Indépendance

Exercice 1.— Échauffement 1 : autour de la défition d'indépendance

1. Soit A, B, C 3 événements. On suppose $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$. Est-ce que A, B et C sont indépendants ?
2. On suppose que A et ${}^cB$ sont deux événements indépendants. Est-ce que A et B sont indépendants ?
3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans des espaces mesurables $(E_1, \mathcal{E}_1), \ldots (E_n, \mathcal{E}_n)$. Montrer que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $1 \leq k \leq n-1$, la variable aléatoire X_{k+1} est indépendante de la variable aléatoire $(X_1, \ldots, X_k)$.

Exercice 2.— Échauffement 2 : fonction de répartition et densité

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.

1. On suppose F de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que X est à densité et calculer celle-ci.
2. On suppose F continue. Est-ce que X est à densité ?

Exercice 3.— Maximum de variables à densité

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et à densité. Montrer que $\max(X, Y)$ est à densité et calculer celle-ci.

Exercice 4.— Une condition forte

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $[0, 1]$.
On suppose que $\mathbb{P}\Big[X \leq Y\Big] = 1$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\Big[X \leq a \leq Y\Big] = 1$.

Exercice 5.— Indépendance et variables à densité

1. Soit $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sigma > 0$. On considère une variable aléatoire gaussienne [1] $X = (X_1, \ldots, X_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, de moyenne m et de matrice de variance-covariance $\sigma^2 I_d$. Montrer, sans utiliser la fonction caractéristique, que $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes et déterminer leurs lois.
2. Soit U une variable de loi exponentielle de paramètre 1 et soit V une variable uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. On suppose que U et V sont indépendantes. Montrer que les variables aléatoires X et Y définies par $(X, Y) = \sqrt{U}(\cos(V), \sin(V))$ sont indépendantes et calculer leurs lois.

1. On rappelle, que dans ce cas, la loi de X admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$g(x_1, \ldots, x_d) = (2\pi\sigma^2)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|x-m\|_d^2}{2\sigma^2}\right)$$

Exercice 6.— Formule d'Euler

La fonction ζ de Riemann est définie pour $s > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la tribu totale $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie par :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \quad \mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathrm{A}} n^{-s}.$$

Pour p premier, on pose $\mathrm{A}(p) = p\mathbb{N}^*$ l'événement « n est multiple de p ».

1. Justifiez que $\mathbb{P}$ est bien une mesure de probabilité.
2. Montrer que pour $p_1, \ldots, p_k$ premiers distincts, les évenements $\mathrm{A}(p_1), \ldots, \mathrm{A}(p_k)$ sont indépendants.
3. Montrer la formule d'Euler

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Exercice 7.— Mesure uniforme sur un groupe

Soit G un groupe fini. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans G. On pose Z := XY, le produit dans G des éléments aléatoires X et Y. Montrer que si X est uniforme, alors Z l'est aussi. Prouver le même résultat dans le cas où G n'est pas un groupe fini, mais $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$; "uniforme" signifiera dans ce cadre "distribué suivant la mesure de Lebesgue sur $[0, 1[$".