Lois du 0-1... y compris le lemme de Borel-Cantelli et la loi des grands nombres !

Exercice 1.— Échauffement

Soit $\alpha > 0$, et soit Z_n une suite de variables aléatoires indépendantes de lois données par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans L^1, mais que presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Exercice 2.— Plus longue suite de piles consécutifs

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Pour $n \geq 1$, on note

$$P_n = \sup\{k \geq 1, X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{n+k-1} = 1\},$$

où $\sup \emptyset = 0$, et $R_n = \sup\{P_1, \ldots, P_n\}$ la plus longue suite de 1 "démarrée avant l'instant $n + 1$". Dans les deux premières questions, ε est quelconque dans $(0, 1)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(P_n \geq k)$ pour $n \geq 1$ et $k \geq 0$. En appliquant ce calcul à $k_n = \lfloor (1+\varepsilon) \log_2(n) \rfloor$, montrer que p.s.,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log_2(n)} \leq 1 + \varepsilon.$$
2. Calculer, pour $k \geq 1$ et $l \geq 1$, la probabilité de l'événement $\{P_{ik+1} < k$ pour tous $i = 0, \ldots, l\}$. En l'appliquant à $k_n = \lfloor (1 - \varepsilon) \log_2(n) \rfloor$ et à $l_n = \lfloor (n - 1)/k_n \rfloor$, montrer que presque sûrement, pour n assez grand, on a $R_n \geq k_n$.
3. En déduire que R_n est presque sûrement équivalent à $\log_2(n)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 3.— Marche aléatoire simple sur $\mathbb{N}$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On définit la marche aléatoire simple $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$ par $S_0 = 0$ et $S_n := |\sum_{k=1}^n X_k|$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (S_n) est presque sûrement non-bornée.
2. On définit, pour $k \geq 0$, l'instant $T_k := \inf\{n \geq 0, S_n = k\}$, presque sûrement fini. Montrer que l'événement $\{\exists n \in [T_k, T_{2k}[, S_n = 0\}$ est indépendant de $(S_n)_{n\leq T_k}$, et déterminer sa probabilité.
3. Montrer que presque sûrement, la suite (S_n) passe une infinité de fois par 0.

Exercice 4.— Théorème limite et convergence d'intégrale

Déterminer la loi d'une somme de n variables exponentielles de paramètres 1 indépendantes, puis déterminer la limite de

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{n!} f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} dx,$$

pour f fonction continue bornée, lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5.— Marche aléatoire exponentielle

Soit (U_i) une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{P}(\mathrm{U}_i = 2) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{U}_i = \frac{1}{2}) = p$. On définit par récurrence

$$\mathrm{X}_0 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 1, \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{U}_n \mathrm{X}_{n-1}.$$

Les X_n représentent le cours d'une action au temps n qui peut à chaque étape doubler avec probabilité p ou voir sa valeur divisée par 2 avec probabilité $1 - p$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_n, et déterminer $p_{\text{éq}}$ tel que $\mathbb{E}\mathrm{X}_n$ est constamment égale à 1 pour $p = p_{\text{éq}}$.
2. Montrer qu'il existe une valeur $p_0 \in]p_{\text{éq}}, 1[$ telle que X_n converge vers 0 p.s. si $p < p_0$ tandis que X_n diverge vers l'infini p.s. si $p > p_0$. Et pour $p = p_0$?

On cherche à devenir infiniment riche dans des cas un peu moins favorables que $p > p_0$.

3. On définit maintenant Z_n par

$$\mathrm{Z}_0 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 1, \quad \mathrm{Z}_n = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_{2n-1} + \mathrm{U}_{2n})\mathrm{Z}_{n-1}.$$

   (a) Interpréter le processus Z_n comme évolution de sa fortune si l'on suit un certain schéma d'investissement. Calculer $\mathbb{E}\mathrm{Z}_n$.

   (b) Déterminer la loi de $\mathrm{V}_n = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_{2n-1} + \mathrm{U}_{2n})$.

   (c) Démontrer qu'il existe une valeur $p_1 \in]p_{\text{éq}}, p_0[$ tel que Z_n tend vers l'infini p.s. dès que $p > p_1$.

4. Montrer que pour tout $p > p_{\text{éq}}$, on peut définir une stratégie telle que sa fortune tende vers l'infini presque-sûrement. Cela reste-t-il possible si $p \leq p_{\text{éq}}$?