Convergence de variables aléatoires

Exercice 1.— Il y a convergence et convergence

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que pour tout n, X_n est une variable de Bernoulli de paramètre $u_n \in [0,1]$. Pour quelles suites (u_n) a-t-on :
   (a) $X_n \to 0$ dans L^p, où $p \in [1,\infty[$.
   (b) $X_n \to 0$ presque-sûrement.
2. Donner un exemple de suite de variables aléatoires convergeant vers 0 en probabilités mais pas presque-sûrement
3. Donner un exemple de suite convergeant presque sûrement mais pas dans L^1.
4. Les critères 1a et 1b restent-ils valables si l'on retire l'hypothèse d'indépendance ?

Exercice 2.— Théorème de Bernstein-Weierstass

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Le n-ième polynôme de Bernstein de f est

$$B_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n}).$$

1. Exprimer $B_n(x)$ à l'aide d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et x.
2. En déduire le théorème de Bernstein-Weierstrass

$$||B_n - f||_\infty \to 0.$$

Exercice 3.— Théorème limite et convergence d'intégrale

Déterminer la loi d'une somme de n variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes, puis déterminer la limite de

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f(\frac{x}{n}) e^{-x} dx,$$

pour f fonction continue bornée, lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4.— LFGN, cas non intégrable

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. *non intégrables*, et soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Si l'on suppose de plus que $X_1^- = \min(0, -X_1)$ est intégrable, montrer que S_n/n tend vers $+\infty$ presque sûrement.
2. Dans tous les cas, montrer que l'on a

$$\{S_n/n \text{ a une limite finie}\} \subset (\limsup\{|X_n| \geq n\})^c.$$

   et en déduire que $(S_n/n)_{n\geq 1}$ diverge presque sûrement.

3. Plus généralement, montrer que presque sûrement, S_n/n n'est pas bornée.
4. On suppose maintenant que X_1 et $-X_1$ ont même loi (on dit que la loi de X_1 est symétrique). Montrer que presque sûrement, $\sup S_n/n = +\infty$ et $\inf S_n/n = -\infty$.

Exercice 5.— [Nombre de cycles d'une grande permutation aléatoire]

Dans ce problème, on cherche à estimer le nombre de cycles que contient une grande permutation aléatoire. Pour $n \geq 1$, on notera $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, .., n\}$, et S_n une variable aléatoire uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Cette permutation aléatoire s'écrit de manière unique comme produit de cycles à supports disjoints, et on note $c(S_n)$ le nombre de cycles dans cette écriture. Ce nombre est donc une variable aléatoire à valeurs comprises entre 1 (si $S_n(\omega)$ est un cycle) et n (si $S_n(\omega)$ est l'identité). On va montrer qu'en fait $c(S_n)$ est proche de $\log(n)$ lorsque n est grand.

I : De $\mathfrak{S}_n$ à $\mathfrak{S}_{n+1}$ ...

Pour $n \geq 1$, soit Φ^n l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi^n : & \mathfrak{S}_n \times \{1, ..., n+1\} & \to & \mathfrak{S}_{n+1} \\ & (\sigma, i) & \mapsto & \tilde{\sigma} \circ (i\ (n+1)), \end{array}$$

où $(i\ (n+1))$ désigne la transposition échangeant i et $(n+1)$ (ou bien l'identité si $i = n+1$), et où $\tilde{\sigma}$ est l'élément de $\mathfrak{S}_{n+1}$ laissant fixe $n+1$ et agissant comme σ sur $\{1, ..., n\}$.

1. Montrer que Φ^n est une bijection.
2. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \{1, ..., n+1\}$, exprimer $c(\Phi^n(\sigma, i))$ en fonction de $c(\sigma)$ et de i.

II : Le processus $(X_n)_{n\geq 1}$.

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que U_i est uniforme sur $\{1, ..., i+1\}$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires telle que X_1 est le seul élément de $\mathfrak{S}_1$, et, pour $n \geq 1$, on a $X_{n+1} = \Phi^n(X_n, U_n)$.

1. Montrer que $c(X_n)$ est une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes dont on précisera les paramètres.
2. Montrer que, pour $n \geq 1$, les variables aléatoires X_n et S_n ont la même loi.
3. Calculer l'espérance et la variance de $c(S_n)$, puis montrer que $c(S_n)/\log(n)$ converge en probabilité vers 1.