Théorème central limite

Exercice 1.— Échauffement

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i e^{X_i}$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On considère $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Calculer la limite de $\mathbb{P}(S_n \in I_n)$ quand n tend vers l'infini, lorsque
   (a) $I_n = [0, an]$, où $a \in]0,1[$;
   (b) $I_n = [pn - 4\sqrt{n}, pn - \sqrt{n}]$;
   (c) $I_n = [pn - n^{1/3}, pn]$.

Exercice 2.— Étude de suite

On pose, pour n entier et α réel positif,

$$T_n(\alpha) = e^{-n}\sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n\rfloor} \frac{n^k}{k!}.$$

1. Soit X, Y deux variables de Poisson, de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Montrer que X + Y suit encore une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\alpha) = 0$ si $\alpha < 1$, et $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\alpha) = 1$ si $\alpha > 1$.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} T_n(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.— Lemme de Slutsky

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers une constante c, et soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers une variable aléatoire Y. Montrer que $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers cY, et que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $c + Y$.
2. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de moyenne nulle et telles que $\mathbb{E}Z_1^2 < +\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Z_k \quad \text{et} \quad \Sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Z_k^2$$

   Montrer que

$$\frac{\sqrt{n}M_n}{\Sigma_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

   Ce résultat est utilisé en statistiques quand on ne connaît pas la variance σ^2 et qu'on doit la remplacer par Σ_n^2, la "variance empirique".

Exercice 4.— Loi stable dans L^2

Une variable aléatoire réelle X est dite stable si pour tout entier n, il existe des réels a_n et b_n telle qu'une somme de n copies indépendantes de X a même loi que $a_n X + b_n$. Dans cet exercice, on s'intéresse au cas où X est de carré intégrable.

1. Soit $\widetilde{X} = X - \mathbb{E}X$. Montrer que $\widetilde{X}$ suit encore une loi stable, avec les réels a_n inchangés et les réels b_n tous nuls.
2. Montrer que pour tout n, on a $a_n = \pm\sqrt{n}$, puis montrer que X est une variable gaussienne.