TD 1 : Premiers exemples de chaînes de Markov

Exercice 1.— Chaîne de Markov et matrice de transition

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus aléatoire à valeurs dans E fini ou dénombrable, et soit $Q = (Q_{x,y})_{(x,y)\in E^2}$ une matrice stochastique.

1. (a) Montrer que les deux définitions du cours de "X est une chaîne de Markov de matrice de transition Q" sont équivalentes. On supposera désormais que X est une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

   (b) Vérifier que pour $l \in \mathbb{N}$, le processus $(X_{ln})_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus de Markov. Quelle est sa matrice de transition ?

2. On appelle μ la loi de X_0, que l'on assimile au vecteur ligne $(\mu(\{i\}))_{i\in E}$. Une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ est assimilée à un vecteur colonne $(f(i))_{i\in E}$.

   (a) Avec ces notations, vérifier que l'espérance de $f(X_0)$ est simplement donnée par le produit matriciel μf. Plus généralement, montrer que pour tout $n \geq 0$, on a
   $$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mu Q^n f.$$
   Quelle est la loi de X_n ?

   (b) Vérifier qu'une fonction constante est un vecteur propre pour Q correspondant à la valeur propre 1. Interpréter ce résultat à la lumière de la question précédente.

   (c) On suppose E fini. Montrer que Q n'admet pas de valeur propre dont la valeur absolue est strictement plus grande que 1.

Exercice 2.— Reconnaître une chaîne de Markov

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E fini ou dénombrable, de matrice de transition Q.

1. Soit $f : E \to F$ surjective. Est-ce que $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur F ? Si oui, expliciter sa matrice de transition.

2. On rajoute à E un point extérieur ∂ pour former $\widetilde{E} = E \cup \{\partial\}$. Soit T une variable aléatoire géométrique de paramètre $\lambda \in [0, 1[$, indépendante de $(X_n)_{n\geq 0}$. On rappelle que cette loi est caractérisée par $\mathbb{P}(T = k) = (1 - \lambda)\lambda^k$. On construit le processus $(Y_n)_{n\geq 0}$ défini par
   $$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{si } n < T \\ \partial & \text{si } n \geq T \end{cases}.$$
   Le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-il un processus de Markov ? Si oui, expliciter sa matrice de transition. Et si l'on remplace T par $T + 1$ ou par $T + 2$?

3. Même question pour les processus $Y_n = X_n + X_{n-1}$ et $Z_n = (X_n, Y_n)$, dans le cas où $(E, +)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3.— Chaîne de Markov à deux états

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à deux états notés 1 et -1, vérifiant $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, et dont la matrice de transition est

$$Q = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

pour un $\varepsilon > 0$ donné.

1. Montrer que pour $n \geq 0$, on a $\mathbb{P}(X_n = (-1)^n) \geq 1 - n\varepsilon$. En particulier, si $n\varepsilon << 1$, la loi de X_n est proche d'une masse de Dirac au point $(-1)^n$.
2. Calculer Q^n pour $n \geq 0$ et montrer que la loi de (X_n) tend vers la mesure uniforme sur $\{1, -1\}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 4.— Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1. Montrer que $(X_k)_{k\geq 0}$, la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est une chaîne de Markov, et expliciter sa matrice de transition Q.
2. On dit que μ est une mesure de probabilité invariante pour cette chaîne de Markov si μ est une mesure de probabilité et $\mu Q = \mu$. Ceci est encore équivalent à dire que, si X_0 suit la loi μ, alors, pour tout $k \geq 0$, la loi de X_k est encore μ. Montrer qu'il existe une unique mesure invariante pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, que l'on explicitera et que l'on notera μ_0.
3. On considère les vecteurs ligne suivants :

$$\left(\cos\left(\frac{2lm\pi}{n}\right)\right)_{m\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, \quad 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$
$$\left(\sin\left(\frac{2lm\pi}{n}\right)\right)_{m\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, \quad 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

   Montrer que ces vecteurs sont bien définis et forment une base de vecteurs propres à gauche pour Q. On précisera les valeurs propres associées.
4. On suppose $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$. Si n est impair et $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,, montrer que $P(X_k = m)$ tend vers $\mu_0(\{m\})$ et étudier la vitesse de convergence. En particulier, X_k *converge en loi* vers μ_0.
5. Pour n pair, X_k converge-t-elle en loi ? Discuter le comportement de la loi de X_k.
6. On considère la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dont la loi de saut a été modifiée, de sorte que $\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n | X_n) = \varepsilon$, et $\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1 | X_n) = (1-\varepsilon)/2$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1 | X_n) = (1-\varepsilon)/2$. On note $\widetilde{Q}$ la matrice de transition associée [1]. Montrer que l'on a simplement $\widetilde{Q} = (1-\varepsilon)Q + \varepsilon I$, où I est la matrice identité. Reprendre les questions 2 à 4 pour cette nouvelle chaîne de Markov, et montrer en particulier qu'on a maintenant toujours convergence vers l'unique mesure de probabilité stationnaire.

---

1. On dit parfois qu'on a "rendu la marche paresseuse". Voyez-vous pourquoi ?