TD 2 : classification des états

Exercice 1.— irréductibilité, apériodicité

Si une chaîne de Markov (X_n) est irréductible (resp. irréductible apériodique), est-ce que (X_{2n}) est nécessairement irréductible (resp. irréductible apériodique) ? Et les réciproques ?

Exercice 2.— convergence en loi pour une chaîne transitoire ?

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible transitoire sur E dénombrable. Montrer que la loi de X_n converge vaguement vers la mesure nulle, et en déduire que X_n ne converge pas en loi.
2. On considère $F = E \cup \{\partial\}$ le *compactifié d'Alexandroff* de E. Dans F, ∂ est un *point à l'infini*, dont les voisinages dans F sont les complémentaires des parties finies contenant ∂. Montrer que X_n converge en loi vers une masse de Dirac en ∂.

Remarque 1 : *On rappelle qu'une suite de mesures $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge vaguement vers μ si l'intégrale d'une fonction positive f continue à support compact contre μ_n converge toujours vers son intégrale contre μ. La suite converge $*$-faiblement si cela reste vrai pour toute fonction positive f continue bornée, ou, de manière équivalente dans le cas où les μ_n sont des mesures de probabilité, si μ est aussi une mesure de probabilité.*

Remarque 2 : *Ces deux questions illustrent le phénomène de "perte de masse à l'infini".*

Exercice 3.— Equations de Chapman-Kolmogorov

On rappelle les équations de Chapman-Kolmogorov vérifiées par les chaînes de Markov :

$$\forall i, j \in E, \forall l < m < n \in \mathbb{N},\ p_{l,n}(i,j) = \sum_{k\in E} p_{l,m}(i,k)p_{m,n}(k,j),$$

où l'on a noté $p_{l,m}(i,j) = \mathbb{P}(X_m = j|X_l = i)$ (encore égal à $Q^{m-l}(i,j)$ pour une chaîne de Markov de matrice de transition Q). On se donne une suite (U_n) de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\{-1,1\}$ telles que $P(U_0 = -1) = P(U_0 = 1) = 1/2$ et on définit la suite (X_n) par : $X_{2n} = U_n$ et $X_{2n+1} = U_nU_{n+1}$.

1. Montrer que la suite (X_n) est i.i.d.
2. Vérifier que la suite (X_n) satisfait les équations de Chapman-Kolmogorov.
3. Montrer que ce n'est pourtant pas une chaîne de Markov.

Exercice 4.— processus de branchement 1

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ vérifiant $\mu(\{0\}) \in]0,1[$. Soient $(\xi_{n,j})_{(n,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi μ, et soit X_0 une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ indépendante de $(\xi_{n,j})_{(n,j)\in\mathbb{N}^2}$. On considère le processus de branchement de loi de reproduction μ défini par récurrence par

$$X_{n+1} := \sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k}, \quad n \geq 0.$$

1. Définir les classes d'irréductibilité du processus X_n. Vérifier que 0 est un état absorbant et que tous les autres états sont transitoires.
2. En déduire que presque sûrement, ou bien la population X_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, ou bien elle s'éteint (il existe n_0 tel que $X_n = 0$ pour $n \geq n_0$).

Exercice 5.— chaîne de Markov conditionnée

On considère l'espace de probabilité $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu rendant mesurable les applications coordonnées

$$X_n : \begin{array}{ccc} E^{\mathbb{N}} & \to & E \\ \omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & \omega_n \end{array} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

Soit $x \in E$. On suppose que sous $\mathbb{P}$, le processus des coordonnées $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible vérifiant $\mathbb{P}(H_x < \infty) \in]0,1[$, et on définit, sur $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$, une nouvelle mesure de probabilité, $\widetilde{\mathbb{P}}$, égale à la mesure conditionnelle de $\mathbb{P}$ sachant $H_x < \infty$.

1. Si $\mathbb{P}(X_0 = x) = 0$, montrer que sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, le processus $(X_{n\wedge H_x})_{n\geq 0}$ est encore une chaîne de Markov dont on explicitera la matrice de transition. Cette chaîne est-elle irréductible ?
2. On modifie cette matrice de transition uniquement au point x, en définissant, pour $y \in E$,
$$\widetilde{Q}(x,y) = \frac{\mathbb{P}_x(X_1 = y, H_x < \infty)}{\mathbb{P}_x(H_x < \infty)}.$$
Montrer qu'on obtient alors une chaîne de Markov irréductible récurrente.

Remarque : *En quelque sorte, on a construit la chaîne de Markov conditionnée à l'événement de mesure nulle "revenir une infinité de fois en x".*