TD 3 : Théorème de Perron-Frobenius

Le but de cette feuille sera de prouver le théorème de Perron-Frobenius, dont nous donnons un énoncé.

Théorème de Perron-Frobenius : Soit $n \geq 1$ et $Q \in M_d(\mathbb{R}_+)$ une matrice stochastique. On notera $Q^n = (q_{i,j}^{(n)})_{(i,j)\in\{1,...,d\}^2}$. On suppose Q irréductible, à savoir, pour tout i, j, il existe n tel que $q_{i,j}^{(n)} \neq 0$. Alors la période au point i, à savoir $p_i = \text{pgcd}\{n \geq 0, q_{i,i}^{(n)} > 0\}$, ne dépend pas de i. On la note p et on l'appelle la période de Q.

- Le rayon spectral de Q est 1. Les valeurs propres de Q de module 1 sont exactement les racines p-èmes de l'unité, et sont valeurs propres simples.
- Le spectre de Q est invariant par rotation d'angle $2\pi/p$.
- Si $p > 1$, il existe une matrice de permutation S telle que l'on puisse écrire

$$S^{-1}QS = \begin{pmatrix} 0 & Q_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Q_{2,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & Q_{p-1,p} \\ Q_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où les blocs diagonaux sont des matrices carrées (nulles).

0. Préliminaires

On admet (vu en cours) l'existence d'une mesure de probabilité invariante μ, écrite sous forme d'un vecteur ligne $\big(\mu(\{1\}), ..., \mu(\{d\})\big)$.

1. Montrer que pour tout i, on a $\mu(\{i\}) > 0$.
2. Soit D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\mu(\{1\}), \mu(\{2\}), ..., \mu(\{d\})$, qui est donc inversible. Montrer que $D^{-1}\,{}^tQD$ est une matrice stochastique.

I. L'espace propre associé à la valeur propre 1

On note $\mathbf{1}$ le vecteur colonne ne contenant que des 1. On rappelle que $\mathbf{1}$ est un vecteur propre de Q associé à la valeur propre 1.

1. Montrer que le rayon spectral de Q (la plus grande norme des valeurs propres complexes de Q) est 1.
2. Si $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ sont des vecteurs colonnes à coefficients réels, on note $X \geq Y$ si pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $x_i \geq y_i$. Soit X un vecteur positif ($X \geq 0$) vérifiant $QX \geq X$. Montrer que $QX = X$, puis montrer que toutes les composantes de X sont non-nulles.

   On pourra penser à utiliser l'irréductibilité de Q.

3. Si $Z = (z_i)$ est un vecteur propre (complexe) associé à une valeur propre de module 1, montrer que $|Z| = (|z_i|)$ est un vecteur propre positif associé à la valeur propre 1. Puis, montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par $\mathbf{1}$.

II. Simplicité de la valeur propre 1

On note P la transposée de la comatrice de $I_d - Q$.

1. Montrer que la dérivée du polynôme caractéristique de Q en 1 est la trace de P.
2. Montrer que chaque colonne de P est un multiple de $\mathbf{1}$.
3. Montrer que chaque ligne de P est un multiple de μ. *(indice : penser aux préliminaires...)*
4. Montrer que P n'est pas la matrice nulle, et en déduire que tous ses termes sont non-nuls et de même signe.
5. En déduire que 1 est valeur propre simple de Q.

III. Les autres valeurs propres de module 1.

Soit $Z = (z_i)$ un vecteur propre complexe associé à une valeur propre λ de norme 1.

1. Vérifier que $|z_i|$ est indépendant de i, et en déduire que, quitte à multiplier Z par une constante non nulle, on peut supposer $z_1 = 1$.
2. Montrer que si $q_{i,j} > 0$, alors $z_j = \lambda z_i$.
3. En déduire que λ est une racine p-ème de l'unité.

Réciproquement, soit λ une racine p-ème de l'unité. On définit le vecteur $Z^{(\lambda)} = (z_i^{(\lambda)})$ par $z_1^{(\lambda)} = 1$ et $z_i^{(\lambda)} = \lambda^k$ si $q_{1,i}^{(k)} \neq 0$.

4. Justifier que le vecteur $Z^{(\lambda)}$ est bien défini, et est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
5. Soit Δ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $z_i^{(\lambda)}$. Montrer que l'on a
$$\Delta^{-1} Q \Delta = \lambda Q.$$
En déduire que les valeurs propres associées aux racines p-ème de l'unité sont toutes simples, et que de plus le spectre de Q est invariant par rotation d'angle $2\pi/p$.
6. Achever la preuve du théorème, en explicitant la matrice S.

Remarque : Le théorème de Perron-Frobenius dans sa forme générale considère une matrice qui n'est pas nécessairement stochastique, la somme des éléments sur chaque ligne n'est pas forcément égale à 1. Dans ce cas le rayon spectral ρ n'est pas forcément 1, *et* $\mathbf{1}$ *n'est plus nécessairement vecteur propre. Mais on peut montrer que ρ est encore valeur propre, et que lui est associé un vecteur propre à coefficients réels strictement positifs. On peut alors se ramener à une matrice stochastique par la même méthode que dans les préliminaires pour la matrice ${}^tQ$.*