TD 4 : propriété de Markov

Exercice 1.— fonction de Green et hérédité de la propriété de récurrence

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur E dénombrable, et x et y deux éléments distincts de E. On note $H_y := \inf\{n > 0, X_n = y\}$ le temps d'atteinte de y.

1. Montrer que l'on a
$$G(x,y) = \mathbb{P}_x(H_y < \infty)G(y,y),$$
où G désigne la fonction de Green de la marche aléatoire.
2. Montrer que si x est récurrent et $G(x,y) > 0$, alors y est récurrent.
La contraposée est également souvent utile. Si $G(x,y) > 0$ et y est transitoire, alors x est transitoire.

Exercice 2.— processus de branchement 1

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ vérifiant $\mu(\{0\}) \in]0,1[$. Soient $(\xi_{n,j})_{(n,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi μ, et soit X_0 une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ indépendante de $(\xi_{n,j})_{(n,j)\in\mathbb{N}^2}$. On considère le processus de branchement de loi de reproduction μ défini par récurrence par

$$X_{n+1} := \sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k}, \quad n \geq 0.$$

1. Vérifier que 0 est un état absorbant et que tous les autres états sont transitoires.
2. En déduire que presque sûrement, ou bien la population X_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, ou bien elle s'éteint (il existe n_0 tel que $X_n = 0$ pour $n \geq n_0$).

Exercice 3.— convergence en loi pour une chaîne transitoire ?

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible transitoire sur E dénombrable. Montrer que la loi de X_n converge vaguement vers la mesure nulle, et en déduire que X_n ne converge pas en loi.
2. On considère $F = E \cup \{\partial\}$ le *compactifié d'Alexandroff* de E. Dans F, ∂ est un *point à l'infini*, dont les voisinages dans F sont les complémentaires des parties finies contenant ∂. Montrer que X_n converge en loi vers une masse de Dirac en ∂.

Remarque : *Ces deux questions illustrent le phénomène de "perte de masse à l'infini".*

Exercice 4.— états symétriques

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible et récurrente sur E. On suppose que les états x et y de E possèdent la propriété de symétrie suivante :

$$\mathbb{P}_x(H_y < H_x) = \mathbb{P}_y(H_x < H_y).$$

Montrer que l'espérance sous $\mathbb{P}_x$ du nombre de passages en y avant le premier retour en x est 1.

Exercice 5.— marche aléatoire sur le cercle et ruine du joueur

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ partant de $X_0 = 0$. Soit Y le dernier site de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ visité par la marche. Y est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, ..., n-1\}$.

1. Justifier que Y est bien défini, puis que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1)$.
2. En introduisant un temps d'arrêt adéquat et sans faire de calcul, montrer que $\mathbb{P}(Y = k)$ ne dépend pas de $k \in \{1, ..., n-1\}$.
3. En déduire la loi de Y. Toujours sans calcul, retrouver un résultat connu de ruine du joueur, à savoir, la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ partant de $a > 0$ a probabilité a/b d'atteindre un niveau $b > a$ avant de revenir en 0.

Exercice 6.— marche aléatoire biaisée

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, partant de 1, et vérifiant

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) = q = 1 - p.$$

Soit $T := \inf\{n \geq 0, X_n = 0\}$.

1. On suppose $p < 1/2$. Montrer que l'espérance de T est finie et vérifie l'équation :

   $$\mathbb{E}[T] = 1 + 2p\mathbb{E}[T].$$

   En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T]$.

   On pourra penser à introduire le temps d'arrêt U égal à $\inf\{n \geq 1, X_n = 1\}$ sur l'événement $\{X_1 = 2\}$ et infini sur l'événement $\{X_1 = 0\}$, puis utiliser une propriété de Markov simple et une propriété de Markov forte.
2. Montrer que T est d'espérance infinie, d'abord dans le cas $p > 1/2$, puis dans le cas $p = 1/2$.
3. On se place dans le cas $p = 1/2$. Soit

   $$S = \inf\{n \geq 0, X_n = \max\{X_k, k \in [0, T]\}\}.$$

   Quelle est la loi du processus $(X_{S+n})_{0\leq n\leq T-S}$ sachant $(X_n)_{n\leq S}$? Pour $k \geq 0$, a-t-on $\mathbb{E}[T - S|S = k] = \infty$?