TD 5 : mesure invariante et récurrence/transience

Exercice -1.— p-périodicité et apériodicité de (X_{np})

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible de période p. Montrer que la chaîne (X_{np}) possède p classes d'irréductibilité et est irréductible apériodique sur chacune de ces classes.

Exercice 0.— Sans l'indépendance par rapport au passé, la propriété de Markov ne caractérise pas les temps d'arrêts

Soit X la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et

$$T := \inf\{n \geq 1, X_{n+1} - X_n = X_1\}.$$

Montrer que $(X_{T+n} - X_T)_{n\geq 0}$ suit la même loi que $(X_n)_{n\geq 0}$, bien que T ne soit pas un temps d'arrêt. Pouvez-vous trouver un autre exemple ou de plus $(X_{T+n} - X_T)_{n\geq 0}$ ne dépend pas de X_T ? Ne dépend pas de $(X_{T-k}, X_{T-k+1}, ..., X_T)$, pour un k donné ?

Exercice 1.— Mesure de probabilité invariante et récurrence

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur E dénombrable, de matrice de transition Q. On suppose donnée μ une mesure de probabilité invariante. On pose $F := \{x \in E, \mu(\{x\}) > 0\}$, et on se donne $(F_k)_{k\in K}$ une partition (finie ou dénombrable) de F en classes d'irréductibilité.

1. Montrer qu'il existe une famille de mesures de probabilité invariante $(\mu_k)_{k\in K}$ telle que μ_k a pour support F_k et une mesure de probabilité ρ sur K telle que $\mu = \sum_{k\in K} \rho(\{k\})\mu_k$.
2. Montrer que si $x \in F_k$, sous $\mathbb{P}_x$, la chaîne de Markov est à valeurs dans F_k, irréductible (sur F_k) récurrente positive.

Remarque : En fait, les mesures de probabilité invariantes sur les classes d'irréductibilité (forcément classes de récurrence positive) sont les mesures de probabilités invariantes extrémales*, c'est-à-dire celles qui ne peuvent pas s'écrire comme combinaison convexe non triviale d'autres mesures de probabilité invariantes.*

Exercice 2.— Marche aléatoire symétrique transiente sur $\mathbb{Z}$

On rappelle que la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente si $d = 1$ ou 2 et transiente si $d \geq 3$. Soit X la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^3$, et (T_n) la suite des instants de passage de cette marche dans $\mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}$, définie par $T_0 = 0$, et, par récurrence, par

$$T_{n+1} = \inf\big\{k > T_n, X_k \in \mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}\big\}, \qquad n \geq 0.$$

Montrer que les instants de passage T_n sont presque sûrement tous finis, et que $(X_{T_n})_{n\geq 0}$ induit une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ et transiente.

Le résultat du cours ne s'étend donc pas aux marches aléatoires dont les incréments sont symétriques (mais non intégrables).

Exercice 3.— Chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ avec barrière partiellement réfléchissante

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, dont la matrice de transition Q est donnée par :

$$Q(m,n) := \begin{cases} p\delta_{n,m+1} + q\delta_{n,m-1} & \text{si } m \geq 1 \\ r\delta_{n,1} + (1-r)\delta_{n,0} & \text{si } m = 0 \end{cases},$$

où p, q sont dans $(0,1)$ et vérifient $p+q=1$, et $r \in (0,1]$. Ainsi, la chaîne est irréductible et se comporte comme la marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, et est partiellement (ou totalement) réfléchie en 0 avec un "coefficient de réflexion" ou "coefficient d'élasticité" r.

1. Déterminer les cas de récurrence/transience de la marche.
2. Déterminer les mesures invariantes, et la mesure de probe invariante quand elle existe.
3. Dans le cas de récurrence, calculer, pour $n \geq 0$, l'espérance du premier temps de retour en n.
4. Dans le cas de transience, on pose $T_0 = \inf\{n \geq 0, X_n = 0\}$ et $f(n) = \mathbb{P}_n(T_0 = \infty)$. Montrer que f satisfait l'équation
$$f(n) = pf(n+1) + qf(n-1), \quad n \geq 1,$$
ainsi que les conditions $f(0) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f(n) = 1$. En déduire la valeur de $f(n)$ pour tout entier n.

Exercice 4.— Chaîne de Markov et retournement du temps

Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ une chaîne de Markov sur E dénombrable, de matrice de transition Q, et μ la loi de X_0.

1. On suppose dans cette question μ invariante.
   (a) Montrer que $\{x \in E, \mu(x) > 0\}$ est stable pour la chaîne de Markov.
   (b) Quitte à restreindre E, on suppose désormais que $\forall x \in E, \mu(x) > 0$. Montrer que
   $$\widetilde{Q}(x,y) := \frac{1}{\mu(x)}\mu(y)Q(y,x)$$
   est une matrice stochastique, puis, montrer que $(X_{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $\widetilde{Q}$. Quelle en est la loi initiale ?
2. On suppose dans cette question que la matrice
$$\widetilde{Q}(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{\mu(x)}\mu(y)Q(y,x) & \text{si } \mu(x) > 0 \\ \delta_{x,y} & \text{sinon} \end{cases}$$
est une matrice stochastique. Montrer que μ est nécessairement une mesure invariante.
3. On ne suppose plus μ invariante. Montrer que $(X_{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est encore une chaîne de Markov mais inhomogène en temps. On précisera sa loi initiale et sa matrice de transition à l'instant k, $0 \leq k \leq n-1$.

Remarque : Dans le cas particulier $Q = \widetilde{Q}$, soit $\mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x)$, on dit que μ est une mesure réversible pour Q. La question 2 nous assure donc qu'une mesure réversible est toujours une mesure invariante. L'exercice indique aussi qu'une chaîne de Markov est inchangée par retournement du temps, lorsque la mesure initiale est réversible.