TD 6 : chaînes de Markov, fin

Exercice 1.— Marche aléatoire sur un graphe transitif

Soit $G = (E, V)$ un graphe connexe dont l'ensemble des sommets est E dénombrable et l'ensemble des arêtes est $V \subset E^2$. On suppose le graphe localement fini : Le degré de chaque sommet est fini, et transitif : pour tous x et y dans E, il existe un isomorphisme de graphe envoyant x sur y. En particulier, tous les sommets ont même degré. Enfin, soit X la marche aléatoire simple sur G, qui saute de x à y avec probabilité $1/\deg(x)$ si $(x, y) \in E$. Donner une mesure invariante pour la marche et en déduire que la marche est récurrente positive si et seulement si E est fini. Donner un exemple où la marche est récurrente nulle. Un exemple où la marche est transiente.

Exercice 2.— De l'utilité de l'introduction d'une chaîne de Markov...

Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables i.i.d telle que $\mathbb{P}(U_1 = -1) = \mathbb{P}(U_1 = 1) = 1/2$. On définit un processus $(X_k)_{k\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$ par récurrence par $X_0 = X_1 = 0$ et, pour $k \geq 1$,

$$X_{k+1} = 2X_k - X_{k-1} + U_k.$$

1. Calculer l'espérance de $T := \inf\{k > 0, X_k = X_{k+1} = 0\}$.
2. Si n est impair, montrer que la loi de X_k converge vers la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$.
3. Si n est pair, montrer que X_{4k} et X_{4k+1} convergent en loi vers la mesure uniforme sur les nombres pairs de $\mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$ tandis que X_{4k+2} et X_{4k+3} convergent en loi vers la mesure uniforme sur les nombres impairs.

Indication : Montrer que le processus Y défini par $Y_k = (X_k, X_{k+1})$ est une chaîne de Markov irréductible, et déterminer sa mesure de probabilité invariante. Puis, étudier la période de cette chaîne de Markov...

Exercice 3.— Chaînes de Markov et fonctions harmoniques discrètes

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur E dénombrable et Q sa matrice de transition. Soit g une fonction positive bornée définie sur $A \subset E$. On notera $T_A := \inf n \geq 0, X_n \in A$. On définit une fonction positive f sur E par

$$f(x) := \mathbb{E}_x[g(T_A)\mathbb{1}_{A<\infty}].$$

Montrer que f est la plus petite fonction positive coïncidant avec g sur A et "harmonique sur $E\backslash A$" au sens suivant :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A \\ \sum_{y\in E} Q(x,y)f(y) & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Exercice 4.— Suites de renouvellement

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une "suite de renouvellement" si $u_0 = 1$ et s'il existe $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs de somme 1 telle que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k u_{n-k}.$$

1. Montrer que u est une suite de renouvellement si et seulement si il existe une chaîne de Markov X et un état récurrent x tels que $u_n = \mathbb{P}_x(X_n = x)$.
2. En déduire que si u et v sont des suites de renouvellement, il en est de même de la suite produit $(u_n v_n)_{n\geq 1}$.