TD 7 : Martingales, Introduction

Exercice 1.— Changement de filtration, changement de temps...

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, sur lequel est définie une $(\mathcal{F}_n)-$martingale $(X_n)_{n\geq 0}$.

1. Soit $\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$ la filtration canonique associée au processus X. Vérifier que pour tout n, la tribu $\mathcal{G}_n$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}_n$, puis vérifier que X est également une $(\mathcal{G}_n)$-martingale.
2. Si T est un temps d'arrêt (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$), vérifier que $(X_{n\wedge T})$ est encore une $(\mathcal{F}_n)-$martingale. Que peut-on dire de $(X_{T+n})_{n\geq 0}$?
3. Si Y_n est un processus strictement croissant à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendant de $\mathcal{F}_\infty$ (que l'on suppose donc différent de $\mathcal{F}$), montrer que (X_{Y_n}) est une martingale (on précisera par rapport à quelle filtration).

Les deux exercices suivants permettent de retrouver des résultats bien connus par l'intermédiaire des martingales. Ils montrent déjà la puissance calculatoire des martingales, avant même d'en développer toute la théorie. A venir en particulier, des théorèmes de convergence bien pratiques...

Exercice 2.— Ruine du joueur

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ partant de $a > 0$. Pour $b > a$, on définit les temps d'atteinte $T_0 := \inf\{n \geq 0, X_n = 0\}$ et $T_b := \inf\{n \geq 0, X_n = b\}$, que l'on sait être finis presque sûrement.

1. Montrer que $(X_{n\wedge T_0\wedge T_b})_{n\geq 0}$ est une martingale. En déduire l'espérance de $X_{n\wedge T_0\wedge T_b}$, puis celle de $X_{T_0\wedge T_b}$.
2. En déduire la probabilité que T_b soit plus petit que T_0 (probabilité que le joueur ait atteint la fortune b sans s'être ruiné).

Exercice 3.— Espérance du temps de retour en 0 pour la marche aléatoire biaisée vers l'origine

Soit (X_n) la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ biaisée vers l'origine (cf td4, ex6), qui saute de $+1$ avec probabilité $p < 1/2$, de -1 avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose $X_0 = 1$ et on pose T le temps d'atteinte de 0, que l'on sait être fini presque sûrement.

1. En introduisant une martingale appropriée, calculer l'espérance de

$$X_{n\wedge T} + (1 - 2p)(n \wedge T).$$

2. En déduire dans un premier que l'espérance de T est finie, puis la calculer.

Exercice 4.— Décomposition de Doob

Soit (X_n) un processus $(\mathcal{F}_n)-$adapté, avec les X_n intégrables. On dit qu'un processus (Z_n) est prévisible pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tout n, la v.a Z_n est $\mathcal{F}_{n-1}-$mesurable.

1. Montrer qu'il existe une unique décomposition (appelée décomposition de Doob)

$$X_n = X_0 + Y_n + Z_n \qquad \forall n \geq 0,$$

   où Y est une martingale, Z un processus prévisible, et $Y_0 = Z_0 = 0$. On pourra commencer par montrer que Z doit nécessairement vérifier la relation de récurrence

$$Z_{n+1} = Z_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n.$$

2. Montrer que X_n est une sous-martingale si et seulement si le processus Z est croissant (au sens large).
3. Expliciter la décomposition de Doob dans le cas où $X_n = (\sum_{k=1}^n U_k)^2$, avec les U_k des v.a.i.i.d de carré intégrable et centrées.

Exercice 5.— Filtration dyadique

On considère l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue. On introduit la filtration dyadique suivante :

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left\{[0, 1/2^n]\right\} \cup \left\{]i/2^n, (i+1)/2^n], 1 \leq i \leq 2^n - 1\right\}\right).$$

1. Soit f une fonction intégrable sur $[0,1]$ et X_n l'espérance conditionnelle de f sachant $\mathcal{F}_n$.
   (a) Montrer que pour $n \geq 0$ et $\omega \in [0,1]$, on a

$$X_n(\omega) = 2^n \int_{I_n(\omega)} f(\omega)\lambda(d\omega),$$

   où $I_n(\omega)$ est l'intervalle dyadique de longueur 2^{-n} de $\mathcal{F}_n$ contenant ω. En particulier, X_0 est déterministe.

   (b) En utilisant uniquement l'expression précédente, montrer que (X_n) est une martingale associée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Puis, étudier la convergence presque sûre de X_n. *On pourra penser aux points de Lebesgue de f.*
2. On suppose maintenant que μ est une autre mesure de probabilité sur $[0,1]$, pas nécessairement absolument continue par rapport à λ. On désigne par λ_n (resp. μ_n) la restriction de la mesure λ (resp. μ) à $\mathcal{F}_n$.
   (a) Expliquer pourquoi μ_n est absolument continue par rapport à λ_n.
   On désigne par Y_n la dérivée de Radon-Nikodym :

$$Y_n(\omega) := \frac{d\mu_n}{d\lambda_n}(\omega).$$

   (b) Calculer Y_n et montrer que (Y_n) est une $(\mathcal{F}_n)-$martingale. Etudier la convergence presque sûre de Y_n lorsque μ et λ sont étrangères.